ΚΡΟΥΣΕΙΣ - ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ DOPPLER

Κρούση.

Όταν δύο σώματα πλησιάζουν το ένα στο άλλο και αλληλεπιδρούν, τότε αλλάζει η κίνηση του καθενός, με αποτέλεσμα να έχουμε ανταλλαγή ορμής και ενέργειας. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι έχουμε **κρούση.**

Η κρούση είναι ένα πολύπλοκο φαινόμενο και εμφανίζεται όταν δύο σώματα έρχονται σε επαφή ή σε ελάχιστη απόσταση, με διαφορετικές ταχύτητες ($\vec{\upsilon}_1 \neq \vec{\upsilon}_2$).

Στην περίπτωση της κρούσης δύο σφαιρών, η διάρκεια της κρούσης είναι μικρή, αλλά μεταξύ των σφαιρών ασκούνται ισχυρές δυνάμεις, που εμφανίζονται στις επιφάνειες επαφής τους ως δράση-αντίδραση, με χρονικά μεταβαλλόμενο μέτρο.

Στην περίπτωση κρούσης μεταξύ δύο φορτισμένων σωματιδίων δεν είναι απαραίτητο τα δύο σωματίδια να έρθουν σε επαφή μικροσκοπικά, όπως γίνεται μακροσκοπικά ανάμεσα σε δύο μπάλες, αλλά αρκεί να υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ τους. Π.χ. όταν ένα πρωτόνιο p^+ ρίχνεται εναντίον ενός πυρήνα, αλλάζει η κινητική τους κατάσταση χωρίς το πρωτόνιο να έρχεται σε επαφή με τον πυρήνα. Το φαινόμενο αυτό λέγεται **σκέδαση.**

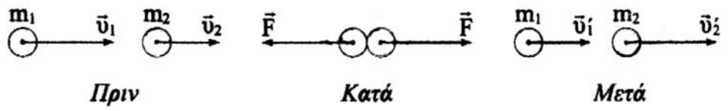
Το σύστημα των σωμάτων που παίρνουν μέρος στην κρούση, δέχεται και **εξωτερικές δυνάμεις.** Αν αυτές οι δυνάμεις **δεν έχουν συνιστάμενη ίση με μηδέν,** μπορούμε να τις θεωρήσουμε **αμελητέες** σε σχέση με τις υπερβολικά μεγάλες και χρονικά σύντομες δυνάμεις αλληλεπίδρασης μεταξύ των σωμάτων του συστήματος που εμφανίζονται κατά την διάρκεια της κρούσης. Άρα το σύστημα των μαζών που παίρνει μέρος στην κρούση, μπορεί να ονομαστεί **απομονωμένο.** Συνεπώς ένα χρήσιμο εργαλείο στην μελέτη της κρούσης είναι η **Α.Δ.Ο.**

Είδη κρούσεων.

Από άποψη ενέργειας :

- Όταν σε μια κρούση ισχύει: $K_{ολ.}^{(πριν)} = K_{ολ.}^{(μετά)}$, τότε την κρούση την λέμε **ελαστική**.
- Όταν σε μια κρούση ισχύει : $K_{ολ.}^{(πριν)} > K_{ολ.}^{(μετά)}$, τότε την κρούση την λέμε **ανελαστική.** Μια ειδική περίπτωση ανελαστικής κρούσης είναι η **πλαστική κρούση**, όπου τα σώματα μετά την κρούση κινούνται ενωμένα, έχουμε δηλαδή **συσσωμάτωμα.**

Από άποψη προσανατολισμού :



- Όταν δύο σφαίρες συγκρούονται και οι ταχύτητές τους κατά τη διάρκεια της κρούσης έχουν τη διεύθυνση της ευθείας που ενώνει τα κέντρα τους (διάκεντρος), τότε την κρούση τη λέμε **μετωπική ή κεντρική.**

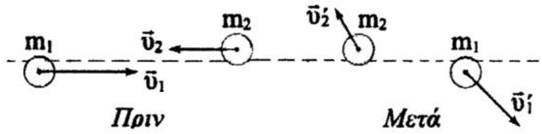
Άρα στη μετωπική κρούση οι ταχύτητες των σφαιρών αμέσως μετά την κρούση έχουν την ίδια διεύθυνση, με τη διεύθυνση που είχαν οι ταχύτητες λίγο πριν την κρούση.

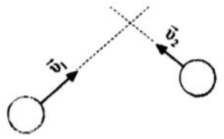
Στη μετωπική κρούση δε μας ενδιαφέρει αν οι ταχύτητες των σφαιρών πριν την κρούση έχουν ίδια ή αντίθετη φορά. Αρκεί οι ταχύτητες να έχουν την ίδια διεύθυνση, αυτή της διακέντρου τους.

- Όταν οι ταχύτητες των σφαιρών πριν την κρούση δεν έχουν τη διεύθυνση της διακέντρου, τότε η κρούση λέγεται **μη μετωπική ή μη κεντρική.** Άρα στη μη μετωπική κρούση, οι ταχύτητες των σφαιρών έχουν διαφορετικές διευθύνσεις πριν την κρούση, με αποτέλεσμα και μετά την κρούση οι σφαίρες να κινούνται σε διαφορετικές διευθύνσεις.

Περιπτώσεις μη κεντρικής κρούσης, είναι :

α) η έκκεντρη κρούση, κατά την οποία οι ταχύτητες των σφαιρών είναι παράλληλες χωρίς όμως τα διανύσματά τους να είναι πάνω στην διάκεντρο και

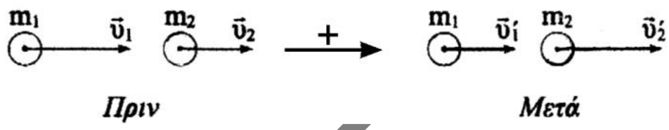




β) η πλάγια κρούση κατά την οποία οι ταχύτητες των σωμάτων πριν την κρούση δεν έχουν την ίδια διεύθυνση.

Να μελετηθεί η ελαστική και μετωπική (κεντρική) κρούση δύο σφαιρών.

Μια σφαίρα μάζας m_1 κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$ και συγκρούεται ελαστικά και μετωπικά με μια άλλη σφαίρα μάζας m_2 που κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_2$. Έστω $\vec{\upsilon}'_1$ και $\vec{\upsilon}'_2$ οι ταχύτητες των σφαιρών αμέσως μετά την κρούση, οι οποίες υποθέτουμε ότι έχουν φορά προς τα δεξιά.



Το σύστημα των δύο σφαιρών είναι μονωμένο, μιας και η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στις σφαίρες είναι ίση με μηδέν. Άρα ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής :

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1\upsilon'_1 + m_2\upsilon'_2 \Leftrightarrow m_1(\upsilon_1 - \upsilon'_1) = m_2(\upsilon'_2 - \upsilon_2) \quad . (1)$$

Επειδή η κρούση είναι ελαστική, ισχύει:

$$K^{(\pi\rho\iota\nu)}_{o\lambda.} = K^{(\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha})}_{o\lambda.} \Leftrightarrow \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 \Leftrightarrow m_1(\upsilon_1^2 - \upsilon_1'^2) = m_2(\upsilon_2'^2 - \upsilon_2^2) \quad . (2)$$

Με διαίρεση κατά μέλη προκύπτει από τις (1) και (2) :

$$\left.\begin{aligned} m_1(\upsilon_1 - \upsilon'_1) &= m_2(\upsilon'_2 - \upsilon_2) \\ m_1(\upsilon_1^2 - \upsilon_1'^2) &= m_2(\upsilon_2'^2 - \upsilon_2^2) \end{aligned}\right\} \overset{\div}{\Leftrightarrow} \frac{m_1(\upsilon_1 - \upsilon'_1)}{m_1(\upsilon_1^2 - \upsilon_1'^2)} = \frac{m_2(\upsilon'_2 - \upsilon_2)}{m_2(\upsilon_2'^2 - \upsilon_2^2)} \Leftrightarrow \frac{(\upsilon_1 - \upsilon'_1)}{(\upsilon_1 - \upsilon'_1)(\upsilon_1 + \upsilon'_1)} = \frac{(\upsilon'_2 - \upsilon_2)}{(\upsilon'_2 - \upsilon_2)(\upsilon'_2 + \upsilon_2)} \Leftrightarrow \upsilon'_2 = \upsilon_1 + \upsilon'_1 - \upsilon_2 \quad . (3)$$

Η (1) με την βοήθεια της (3), θα δώσει :

$$\left.\begin{aligned} m_1(\upsilon_1 - \upsilon'_1) &= m_2(\upsilon'_2 - \upsilon_2) \\ \upsilon'_2 &= \upsilon_1 + \upsilon'_1 - \upsilon_2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow m_1(\upsilon_1 - \upsilon'_1) = m_2(\upsilon_1 + \upsilon'_1 - \upsilon_2 - \upsilon_2) \Leftrightarrow m_1\upsilon_1 - m_1\upsilon'_1 = m_2\upsilon_1 + m_2\upsilon'_1 - 2m_2\upsilon_2 \Leftrightarrow$$

$$m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_1 + 2m_2\upsilon_2 = m_1\upsilon'_1 + m_2\upsilon'_1 \Leftrightarrow \upsilon'_1(m_1 + m_2) = (m_1 - m_2)\upsilon_1 + 2m_2\upsilon_2 \Leftrightarrow$$

$$\upsilon'_1 = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}\upsilon_1 + \frac{2m_2}{(m_1 + m_2)}\upsilon_2 \quad . (4)$$

Η (3) με την βοήθεια της (4) δίνει :

$$\left.\begin{aligned} \upsilon'_2 &= \upsilon_1 + \upsilon'_1 - \upsilon_2 \\ \upsilon'_1 &= \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}\upsilon_1 + \frac{2m_2}{(m_1 + m_2)}\upsilon_2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \upsilon'_2 = \upsilon_1 - \upsilon_2 + \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}\upsilon_1 + \frac{2m_2}{(m_1 + m_2)}\upsilon_2 = \frac{(m_1 + m_2)(\upsilon_1 - \upsilon_2) + (m_1 - m_2)\upsilon_1 + 2m_2\upsilon_2}{(m_1 + m_2)} \Leftrightarrow$$

$$\upsilon'_2 = \frac{m_1\upsilon_1 - m_1\upsilon_2 + m_2\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 + m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_1 + 2m_2\upsilon_2}{(m_1 + m_2)} = \frac{2m_1\upsilon_1 - m_1\upsilon_2 + m_2\upsilon_2}{(m_1 + m_2)} \Leftrightarrow$$

$$\upsilon'_2 = \frac{2m_1}{(m_1 + m_2)}\upsilon_1 + \frac{(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)}\upsilon_2 \quad . (5)$$

Οι (4) και (5) μας δίνουν τις ταχύτητες των σφαιρών 1 και 2 **αμέσως μετά** την ελαστική και μετωπική τους κρούση.

Τι συμβαίνει αν οι σφαίρες έχουν ίσες μάζες ;

Αν οι δύο σφαίρες έχουν **ίσες μάζες (m_1=m_2),** προκύπτει από τις (4) και (5) :

$$\upsilon'_1 = \upsilon_2 \text{ και } \upsilon'_2 = \upsilon_1 .$$

Δηλαδή οι σφαίρες **ανταλλάσσουν** ταχύτητες. Θα δούμε ότι αυτό είναι ένα γενικότερο αποτέλεσμα στην περίπτωση μετωπικής ελαστικής κρούσης δύο σφαιρών ίσης μάζας.

Τι συμβαίνει αν η σφαίρα μάζας m_2 είναι αρχικά ακίνητη ($υ_2$=0) ;

Αν αρχικά η δεύτερη σφαίρα ήταν ακίνητη ($υ_2$=0), οι σχέσεις (4) και (5) δίνουν :

$$υ_1' = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}υ_1 \quad \text{και} \quad υ_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}υ_1 .$$

Διευκρίνιση των παραπάνω σχέσεων.

- <u>1η περίπτωση :</u> **$m_1=m_2$.**

Τότε προκύπτει ότι $υ_1' = 0$ και $υ_2' = υ_1$. Δηλαδή μετά την κρούση, η 1η σφαίρα παραμένει ακίνητη και κινείται η 2η με την ταχύτητα που είχε η πρώτη. Άρα έχουμε **ανταλλαγή ταχυτήτων** και μεταφορά της ενέργειας της 1ης σφαίρας στην 2η.

- <u>2η περίπτωση :</u> **$m_1>m_2$.**

Τότε προκύπτει ότι $υ_1' > 0$ και $υ_2' > 0$, δηλαδή και οι δύο σφαίρες κινούνται προς τα δεξιά, έχουν την φορά της αρχικής $\vec{υ}_1$. Σε αυτήν την περίπτωση **ένα μέρος** της ενέργειας της 1ης μεταφέρθηκε στην 2η σφαίρα.

- <u>3η περίπτωση :</u> **$m_1<m_2$.**

Τότε προκύπτει ότι $υ_1' < 0$ και $υ_2' > 0$, δηλαδή η 1η σφαίρα μάζας m_1 αλλάζει φορά κίνησης και κινείται μετά την κρούση αριστερά ενώ η 2η σφαίρα μάζας m_2 προς τα δεξιά.

- <u>4η περίπτωση :</u> **$m_1>>m_2$.**

Τότε $m_1+m_2 \cong m_1$ και $m_1-m_2 \cong m_1$. Άρα από τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε : $υ_1' = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}υ_1 \Leftrightarrow υ_1' \cong υ_1$ και $υ_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}υ_1 \Leftrightarrow υ_2' \cong 2υ_1$. Άρα όταν μια σφαίρα μάζας m_1 και ταχύτητας $\vec{υ}_1$, συγκρούεται ελαστικά και μετωπικά με αρχικά ακίνητη σφαίρα πολύ μικρότερης μάζας m_2, τότε η σφαίρα μάζας m_1 μετά την κρούση κινείται με ταχύτητα περίπου ίση με την αρχική της, ενώ η μάζα m_2 με ταχύτητα περίπου διπλάσια της $\vec{υ}_1$.

- <u>5η περίπτωση :</u> **$m_1<<m_2$.**

Τότε $m_1+m_2 \cong m_2$ και $m_1-m_2 \cong -m_2$. Άρα από τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε : $υ_1' = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}υ_1 \Leftrightarrow υ_1' \cong -υ_1$ και $υ_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}υ_1 \Leftrightarrow υ_2' \cong 0$. Άρα όταν μια σφαίρα μάζας m_1 και ταχύτητας $\vec{υ}_1$, συγκρούεται ελαστικά και μετωπικά με αρχικά ακίνητη σφαίρα πολύ μεγαλύτερης μάζας m_2, τότε η σφαίρα μάζας m_1 μετά την κρούση αλλάζει φορά κίνησης (ανακλάται) και κινείται με ταχύτητα ίση με την αρχική της, ενώ η μάζα m_2 παραμένει σχεδόν ακίνητη.

Πλάγια ελαστική κρούση σφαίρας σε τοίχο.

Βασιζόμενοι στην 5η περίπτωση της παραπάνω ανάλυσης, μπορούμε να μελετήσουμε την πλάγια κρούση μιας σφαίρας με έναν τοίχο.

Έστω ότι η σφαίρα του σχήματος, έχοντας ταχύτητα $\vec{υ}$ πέφτει υπό γωνία $θ_{πρ.}$ σε τοίχο και ανακλάται υπό γωνία $θ_{αν.}$ έχοντας ταχύτητα $\vec{υ}'$. Αναλύοντας τις ταχύτητες στις συνιστώσες τους, το μέτρο της οριζόντιας συνιστώσας x παραμένει σταθερό, απλά αλλάζει φορά το διάνυσμα της ταχύτητας (περίπτωση 5). Δηλαδή ισχύει :

$$\vec{υ}_x = -\vec{υ}_x' .$$

Η σφαίρα δέχεται δύναμη $\vec{F}$ από τον τοίχο κάθετη σ' αυτόν, συνεπώς επειδή στην διεύθυνση του άξονα yy΄ δεν ασκείται καμία δύναμη, δεν εμφανίζεται επιτάχυνση άρα η ταχύτητα παραμένει σταθερή, δηλαδή :

$$\vec{\upsilon}_y = \vec{\upsilon}'_y .$$

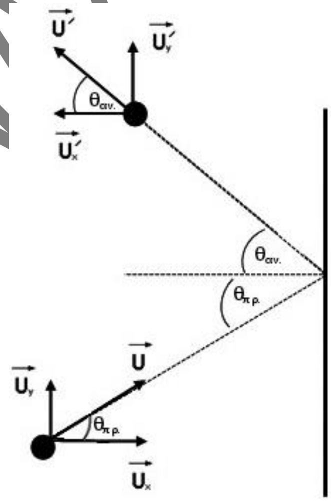
Οπότε το μέτρο της ταχύτητας πριν και μετά την κρούση της σφαίρας με τον τοίχο, θα είναι ίσο με :

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} \quad \text{και} \quad \upsilon' = \sqrt{\upsilon_x'^2 + \upsilon_y'^2} ,$$

αντίστοιχα. Άρα εκμεταλλευόμενοι τις σχέσεις μεταξύ των συνιστωσών θα ισχύει :

$$\upsilon' = \sqrt{\upsilon_x'^2 + \upsilon_y'^2} = \sqrt{\left(-\upsilon_x\right)^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{\upsilon_x{}^2 + \upsilon_y^2} \Leftrightarrow \upsilon' = \upsilon .$$

Δηλαδή όταν ένα σώμα πέφτει πλάγια σε ένα ακλόνητο σώμα μεγάλων διαστάσεων, τότε το μέτρο της ταχύτητας πριν την κρούση θα είναι ίσο με το μέτρο της ταχύτητας μετά την κρούση. Το παραπάνω το περιμέναμε λόγω διατήρησης της κινητικής ενέργειας στην ελαστική κρούση.



Από το σχήμα έχουμε :

$$\etaμθ_{πρ.} = \frac{\upsilon_y}{\upsilon} \quad \text{και} \quad \etaμθ_{αν.} = \frac{\upsilon'_y}{\upsilon'} .$$

Επειδή τα μέτρα των ταχυτήτων και των συνιστωσών τους, είναι ίσα, προκύπτει ότι :

$$\etaμθ_{πρ.} = \etaμθ_{αν.}$$

και επειδή οι γωνίες $θ_{πρ.}$ και $θ_{αν.}$ είναι οξείες θα ισχύει τελικά :

$$θ_{πρ.} = θ_{αν.} .$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί τον **νόμο ανάκλασης**.

Να αποδειχθεί ότι στην ελαστική κρούση οι κινητικές ενέργειες των σωμάτων μεταβάλλονται κατά αντίθετα ποσά.

Στην ελαστική κρούση δύο σωμάτων ισχύουν :

$$K_{ολ.}^{(πριν)} = K_{ολ.}^{(μετά)} \Leftrightarrow K_A^{(πριν)} + K_B^{(πριν)} = K_A^{(μετά)} + K_B^{(μετά)} \Leftrightarrow K_A^{(μετά)} - K_A^{(πριν)} = K_B^{(πριν)} - K_B^{(μετά)} = -\left(K_B^{(μετά)} - K_B^{(πριν)}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Delta K_A = -\Delta K_B .$$

Άρα όσο αυξάνεται η κινητική ενέργεια του ενός σώματος, τόσο μειώνεται η κινητική ενέργεια του άλλου ώστε συνολικά για το σύστημα πριν και μετά την κρούση, να ισχύει :

$$\Delta K_{ολ.} = \Delta K_A + \Delta K_B = 0 .$$

Να μελετηθεί η ανελαστική και μετωπική κρούση δύο σωμάτων.

Μετωπική ανελαστική κρούση έχουμε στην περίπτωση όπου τα σώματα πριν και μετά την κρούση κινούνται πάνω στην ίδια ευθεία και **η κινητική ενέργεια** του συστήματός τους **δεν διατηρείται,** η τελική κινητική ενέργεια του συστήματος είναι (συνήθως) μικρότερη από την αρχική.

Αν τα δύο σώματα πριν την κρούση έχουν ομόρροπες ταχύτητες $\vec{\upsilon}_1$ και $\vec{\upsilon}_2$ και μετά την κρούση $\vec{\upsilon}'_1$ και $\vec{\upsilon}'_2$, τότε η Α.Δ.Ο. και η Α.Δ.Ε. δίνουν :

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1\upsilon'_1 + m_2\upsilon'_2 \quad \text{και}$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 + E_{απωλ.} ,$$ αντίστοιχα.

Το ποσό μείωσης της κινητικής ενέργειας του συστήματος, εμφανίζεται με την μορφή θερμότητας και με την μορφή δυναμικής ενέργειας λόγω παραμόρφωσης κατά την κρούση (απώλειες).

Σε κάθε ανελαστική κρούση το ποσοστό (%) της κινητικής ενέργειας που χάνεται βρίσκεται από την σχέση :

$$\alpha(\%) = \frac{K^{(\alpha\rho\chi.)} - K^{(\tau\varepsilon\lambda.)}}{K^{(\alpha\rho\chi.)}} \cdot 100\%.$$

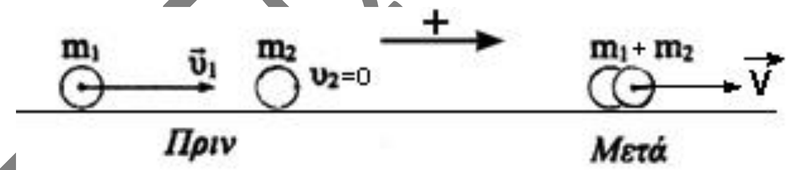
Το παραπάνω κλάσμα θα βγαίνει **αρνητικό** πράγμα που σημαίνει ότι η κινητική ενέργεια χάνεται.

Μετωπική πλαστική κρούση.

Μετωπική πλαστική κρούση δύο σωμάτων, έχουμε στην περίπτωση όπου τα δύο σώματα μετά την κρούση κινούνται ως ένα σώμα, έχουμε δηλαδή **συσσωμάτωμα,** το οποίο κινείται στην ίδια διεύθυνση που κινούνταν τα σώματα πριν από την κρούση.

Η **κινητική ενέργεια** του συστήματος στην μετωπική πλαστική κρούση **δεν διατηρείται** και ένα μέρος της μετατρέπεται κατά την διάρκεια της κρούσης, σε **θερμική ενέργεια** και σε **δυναμική λόγω παραμόρφωσης.**

Ας θεωρήσουμε την περίπτωση στην οποία έχουμε δύο σώματα μάζας m_1 και m_2, αντίστοιχα, με ταχύτητες $\upsilon_1 \neq 0$ και $\upsilon_2=0$. Μετά την μετωπική κρούση, τα σώματα κινούνται ως ένα, δημιουργούν δηλαδή συσσωμάτωμα, μάζας m_1+m_2. Το συσσωμάτωμα, θα κινείται με διαφορετική ταχύτητα από εκείνη του σώματος μάζας m_1, αλλά στην ίδια διεύθυνση. Επειδή το σύστημα των μαζών είναι απομονωμένο, εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο.



Έχουμε:

$$m_1\upsilon_1 = (m_1 + m_2)\cdot V.$$

Από την παραπάνω σχέση, επειδή $m_1<m_1+m_2$, θα πρέπει και η ταχύτητα του συσσωματώματος να είναι μικρότερη από την αρχική του σώματος μάζας m_1. Δηλαδή $\upsilon_1>V$. Άρα έχουμε το σύστημα των εξισώσεων :

$$\left.\begin{aligned} m_1\upsilon_1 &= (m_1+m_2)\cdot V \\ \upsilon_1 &> V \end{aligned}\right\} \overset{\times}{\Leftrightarrow} m_1\upsilon_1^2 > (m_1+m_2)\cdot V^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 > \frac{1}{2}(m_1+m_2)\cdot V^2 \Leftrightarrow$$

$$K_{o\lambda.}^{(\pi\rho\iota\nu)} > K_{o\lambda.}^{(\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha})}.$$

Οπότε επιβεβαιώθηκε το συμπέρασμα, ότι κατά την πλαστική μετωπική κρούση, δεν διατηρείται η ενέργεια.

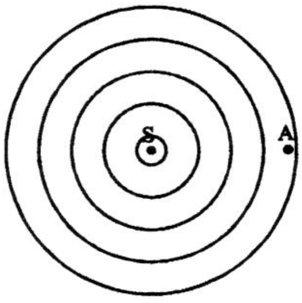
Φαινόμενο Doppler.

Όλοι μας έχουμε παρατηρήσει ότι όταν μας πλησιάζει ένα αυτοκίνητο κορνάροντας, ο ήχος του μας φαίνεται πιο οξύς, ενώ όταν απομακρύνεται η οξύτητα του ήχου ελαττώνεται. Το παραπάνω φαινόμενο ονομάζεται **φαινόμενο Doppler.** Φαινόμενο Doppler, είναι το φαινόμενο εκείνο κατά το οποίο, όταν η **πηγή** του ήχου και ο **παρατηρητής** βρίσκονται σε **σχετική κίνηση μεταξύ τους,** τότε η **συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι διαφορετική από αυτή που εκπέμπει η πηγή.** Όταν ο παρατηρητής και η πηγή κινούνται κατά τέτοιο τρόπο ώστε η μεταξύ τους **απόσταση να μειώνεται,** η **συχνότητα** που ακούει ο παρατηρητής είναι **μεγαλύτερη** από αυτή που εκπέμπει η πηγή. Το φαινόμενο Doppler ισχύει για οποιοδήποτε κύμα.

Έστω ότι f_S και f_A είναι αντίστοιχα η συχνότητα που εκπέμπει η πηγή και η συχνότητα που ακούει ο παρατηρητής, και λ είναι το μήκος κύματος του ήχου (ο ήχος είναι ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα άρα χαρακτηρίζεται από ένα μήκος κύματος).

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις :

<u>α) Ακίνητη πηγή-ακίνητος παρατηρητής.</u>



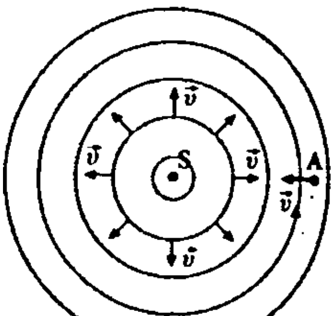
Έστω η πηγή S που εκπέμπει ηχητικά κύματα ταχύτητας υ είναι ακίνητη, όπως και ο παρατηρητής Α. Οι ομόκεντρες σφαιρικές επιφάνειες παριστάνουν τα μέγιστα του ήχου και απέχουν μεταξύ τους ένα μήκος κύματος λ. Όσα μέγιστα παράγει η πηγή σε χρόνο t, τα ίδια μέγιστα φτάνουν στον άνθρωπο στον ίδιο χρόνο. Άρα :

$$\left.\begin{aligned} f_S &= \frac{\upsilon}{\lambda} \\ f_A &= \frac{\upsilon}{\lambda} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow f_S = f_A .$$

Δηλαδή η **συχνότητα** του ήχου που ακούει ο παρατηρητής **είναι ίση** με την συχνότητα που παράγει η πηγή.

Αν η διάρκεια του ήχου της πηγής είναι t_S τότε και η διάρκεια του ήχου που ακούει ο παρατηρητής θα είναι $t_A=t_S$. Πράγματι, αν στον χρόνο t_S αντιστοιχούν Ν κύματα από την πηγή με συχνότητα f_S, τότε ο παρατηρητής ακούει τα Ν κύματα συχνότητας $f_A=f_S$ στον ίδιο χρόνο μιας και $f=\frac{N}{t}$.

<u>β) Ακίνητη πηγή-κινούμενος παρατηρητής.</u>



Τώρα η πηγή S είναι ακίνητη ενώ ο άνθρωπος Α κινείται με ταχύτητα υ_A προς την πηγή. Η σχετική ταχύτητα του ήχου ως προς τον άνθρωπο θα είναι : $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{\upsilon}_A$.

Η αλγεβρική σχέση θα είναι : $\upsilon=\upsilon'-\upsilon_A \Leftrightarrow \upsilon'=\upsilon+\upsilon_A$.

Η συχνότητα της πηγής είναι :

$$f_S = \frac{\upsilon}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda = \frac{\upsilon}{f_S} .$$

Η συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι :

$$f_A = \frac{\upsilon'}{\lambda} \Leftrightarrow f_A = \frac{\upsilon+\upsilon_A}{\lambda} \Leftrightarrow f_A = \frac{\upsilon+\upsilon_A}{\frac{\upsilon}{f_S}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f_A = \frac{\upsilon+\upsilon_A}{\upsilon} f_S .$$

Άρα όταν ο **παρατηρητής πλησιάζει** την ηχητική πηγή, η **συχνότητα** του ήχου που αντιλαμβάνεται είναι **μεγαλύτερη** από την συχνότητα που εκπέμπει η πηγή, άρα ακούει οξύτερο ήχο.

Αν ο άνθρωπος **απομακρύνεται** από την πηγή, με ανάλογους συλλογισμούς, καταλήγουμε στην σχέση :

$$f_A = \frac{\upsilon-\upsilon_A}{\upsilon} f_S .$$

Άρα η **συχνότητα** του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι **μικρότερη** από την συχνότητα που εκπέμπει η πηγή.

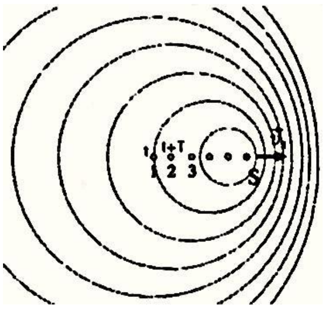
Συνολικά, τις παραπάνω σχέσεις μπορούμε να τις γράψουμε ως :

$$f_A = \frac{\upsilon \pm \upsilon_A}{\upsilon} f_S ,$$

όπου το (+) το χρησιμοποιούμε όταν ο παρατηρητής πλησιάζει και το (-) όταν απομακρύνεται από την πηγή.

Αν η πηγή εκπέμπει ήχο για χρόνο t_S, τα κύματα που αντιστοιχούν σ' αυτό τον χρόνο θα είναι $N=t_S \cdot f_S$. Τα N αυτά κύματα της πηγής, ο κινητός παρατηρητής τα αντιλαμβάνεται σε χρόνο $t_A \neq t_S$. Πράγματι, για τον κινούμενο παρατηρητή ισχύει : $f_A = \frac{N}{t_A} \Leftrightarrow t_A = \frac{N}{f_A} = \frac{t_S \cdot f_S}{f_A} \Leftrightarrow t_A = \frac{f_S}{f_A} \cdot t_S$ και επειδή $f_S \neq f_A$, θα είναι και $t_A \neq t_S$.

γ) Κινούμενη πηγή-ακίνητος παρατηρητής.



Τώρα η **πηγή** S **πλησιάζει** προς τον ακίνητο παρατηρητή με ταχύτητα $υ_S$. Το μήκος κύματος του ήχου που φτάνει στον άνθρωπο μικραίνει γιατί η πηγή ακολουθεί τα κύματα με αποτέλεσμα τα μέγιστα να πλησιάζουν μεταξύ τους.

Έστω ότι την χρονική στιγμή t η πηγή εκπέμπει ένα μέγιστο. Ο χρόνος που μεσολαβεί ανάμεσα σε δύο διαδοχικά μέγιστα είναι ίσος με μια περίοδο T. Έτσι την χρονική στιγμή t+T η πηγή θα εκπέμψει ένα 2° μέγιστο, το 1° μέγιστο θα έχει πλησιάσει τον παρατηρητή κατά ένα μήκος κύματος λ και η πηγή θα τον έχει πλησιάσει κατά $υ_S \cdot T$. Ο άνθρωπος αντιλαμβάνεται σαν μήκος κύματος την απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών μεγίστων που φτάνουν σ' αυτόν, η οποία είναι ίση με $λ-υ_S \cdot T$. Άρα :

$$λ_A = λ - υ_S \cdot T = \frac{υ}{f_S} - υ_S \frac{1}{f_S} = \frac{υ - υ_S}{f_S}.$$

Αλλά $λ_A = \frac{υ}{f_A}$. Άρα :

$$\frac{υ}{f_A} = \frac{υ - υ_S}{f_S} \Leftrightarrow f_A = \frac{υ}{υ - υ_S} f_S.$$

Δηλαδή η **συχνότητα** που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι **μεγαλύτερη** από εκείνη που εκπέμπει η πηγή.

Αν η πηγή **απομακρύνεται** από τον άνθρωπο, με ανάλογους συλλογισμούς, καταλήγουμε στην σχέση :

$$f_A = \frac{υ}{υ + υ_S} f_S.$$

Άρα η **συχνότητα** του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι **μικρότερη** από την συχνότητα που εκπέμπει η πηγή.

Συνολικά, τις παραπάνω σχέσεις μπορούμε να τις γράψουμε ως :

$$f_A = \frac{υ}{υ \mp υ_S} f_S,$$

όπου το (-) το χρησιμοποιούμε όταν η πηγή πλησιάζει και το (+) όταν απομακρύνεται η πηγή από τον παρατηρητή.

δ) Κινούμενη πηγή-κινούμενος παρατηρητής.

Τώρα και η πηγή αλλά και ο παρατηρητής κινούνται. Οι συλλογισμοί είναι οι ίδιοι με τις προηγούμενες περιπτώσεις ενώ παραπάνω σχέσεις μπορούν να γραφούν ως :

$$f_A = \frac{υ \pm υ_A}{υ \mp υ_S} f_S,$$

όπου $υ_A$ είναι η ταχύτητα του παρατηρητή ως προς την πηγή θεωρώντας την ακίνητη και $υ_S$ είναι η ταχύτητα της πηγής ως προς τον παρατηρητή θεωρώντας τον ακίνητο. Ο αριθμητής αναφέρεται συνεπώς στην κίνηση του παρατηρητή και ο παρονομαστής στην κίνηση της πηγής.

Έτσι συγκεντρωτικά έχουμε για το φαινόμενο Doppler, τον παρακάτω πίνακα :

Ακίνητη πηγή.	Ακίνητος παρατηρητής.	$f_A = f_S$.
Ακίνητη πηγή.	Ο παρατηρητής πλησιάζει την πηγή με σταθερή ταχύτητα μέτρου υ_A.	$f_A = \frac{\upsilon + \upsilon_A}{\upsilon} f_S$.
Ακίνητη πηγή.	Ο παρατηρητής απομακρύνεται από την πηγή με σταθερή ταχύτητα μέτρου υ_A.	$f_A = \frac{\upsilon - \upsilon_A}{\upsilon} f_S$.
Η πηγή πλησιάζει τον παρατηρητή με σταθερή ταχύτητα μέτρου υ_S.	Ακίνητος παρατηρητής.	$f_A = \frac{\upsilon}{\upsilon - \upsilon_S} f_S$.
Η πηγή απομακρύνεται από τον παρατηρητή με σταθερή ταχύτητα μέτρου υ_S.	Ακίνητος παρατηρητής.	$f_A = \frac{\upsilon}{\upsilon + \upsilon_S} f_S$.
Πηγή και παρατηρητής πλησιάζουν μεταξύ τους με σταθερές ταχύτητες μέτρων υ_S και υ_A, αντίστοιχα.		$f_A = \frac{\upsilon + \upsilon_A}{\upsilon - \upsilon_S} f_S$.
Ο παρατηρητής «κυνηγάει» την πηγή.		$f_A = \frac{\upsilon + \upsilon_A}{\upsilon + \upsilon_S} f_S$.
Η πηγή «κυνηγάει» τον παρατηρητή.		$f_A = \frac{\upsilon - \upsilon_A}{\upsilon - \upsilon_S} f_S$.
Πηγή και παρατηρητής απομακρύνονται μεταξύ τους.		$f_A = \frac{\upsilon - \upsilon_A}{\upsilon + \upsilon_S} f_S$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κρούσεις.

a. Τους τύπους (4) και (5) μπορούμε να τους χρησιμοποιήσουμε **ΜΟΝΟ** αν η άσκηση αναφέρει ρητά ότι η κρούση είναι μετωπική και ελαστική. Αλλιώς θα δουλεύουμε με τα γενικότερα θεωρήματα Α.Δ.Ο. και Α.Δ.Ε.

b. Αν κάποιο από τα δύο σώματα αρχικά κινείται αντίθετα και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το άλλο, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (4) και (5) παίρνοντας αρνητική την ταχύτητα του σώματος που κινείται αντίθετα.

c. Η κινητική ενέργεια σε μία κρούση διατηρείται **ΜΟΝΟ** αν η κρούση είναι **ελαστική**. Αλλιώς ένα ποσό ενέργειας χάνεται υπό μορφή **θερμότητας**. Σε όλες όμως τις κρούσεις ανεξαιρέτως, διατηρείται η ολική ενέργεια οπότε, λαμβάνοντας υπ' όψη μας αυτό το ποσό θερμότητας μπορούμε να εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ε.

d. Σε περίπτωση **πλάγιας κρούσης** αναλύουμε τις ταχύτητες των σωμάτων πριν και μετά την κρούση σε άξονες και εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. σε καθένα από τους δύο άξονες xx' και yy'.

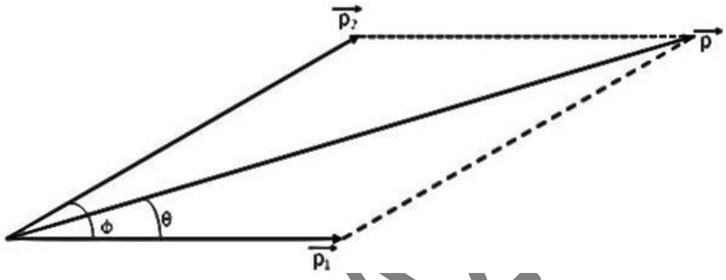
e. Για την σωστή εφαρμογή της Α.Δ.Ο. πρέπει να λάβουμε αυθαίρετα μια θετική φορά. Όσες ταχύτητες είναι ομόρροπες αυτής, είναι θετικές, αλλιώς αρνητικές. Όταν δεν γνωρίζουμε την φορά μιας ταχύτητας, επιλέγουμε αυθαίρετα την φορά της και αν το μέτρο της βγει αρνητικό, σημαίνει ότι η πραγματική φορά είναι αντίθετη αυτής που πήραμε, ενώ αν βγει θετικό σημαίνει ότι η πραγματική φορά είναι αυτή που πήραμε.

f. Οι ορμές είναι διανυσματικά μεγέθη. Άρα πρέπει να ξέρουμε πως να βρίσκουμε την συνολική ορμή. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις σύνθεσης ορμών :

α) οι επιμέρους ορμές είναι **ομόρροπες.** Στην περίπτωση αυτή η συνολική ορμή θα έχει την ίδια κατεύθυνση με την κατεύθυνση των επιμέρους ορμών και μέτρο ίσο με το άθροισμα των μέτρων των επιμέρους ορμών, δηλαδή : $p=p_1+p_2$.

β) οι επιμέρους ορμές είναι **αντίρροπες.** Στην περίπτωση αυτή η συνολική ορμή θα έχει την ίδια κατεύθυνση με την κατεύθυνση της μεγαλύτερης από τις επιμέρους ορμές και μέτρο ίσο με την διαφορά των μέτρων τους, δηλαδή : $p=|p_1-p_2|$.

γ) οι επιμέρους ορμές σχηματίζουν τυχαία γωνία φ μεταξύ τους. Στην περίπτωση αυτή την συνολική ορμή την βρίσκουμε με την μέθοδο του παραλληλογράμμου και το μέτρο της δίνεται από την σχέση :



$$p=\sqrt{p_1^2+p_2^2+2p_1p_2συνφ},$$

ενώ η διεύθυνσή της δίνεται από την σχέση :

$$εφθ=\frac{p_2ημφ}{p_1+p_2συνφ}.$$

δ) οι επιμέρους ορμές είναι κάθετες μεταξύ τους. Στην περίπτωση αυτή η γωνία φ της προηγούμενης περίπτωσης είναι 90° οπότε το μέτρο της συνολικής ορμής δίνεται από την σχέση :

$$p=\sqrt{p_1^2+p_2^2},$$

ενώ η διεύθυνση της δίνεται από την σχέση :

$$εφθ=\frac{p_2}{p_1}.$$

Φαινόμενο Doppler.

g. Αν η ηχητική πηγή εκπέμπει ηχητικά κύματα επί χρόνο t_S, ο αριθμός Ν των μεγίστων που εκπέμπονται σ' αυτόν τον χρόνο είναι $N=f_S\cdot t_S$, **(1)**, όπου f_S είναι η συχνότητα που εκπέμπει η πηγή. Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται αυτά τα Ν μέγιστα επί χρόνο t_A με συχνότητα f_A και ισχύει $N=f_A\cdot t_A$ **(2)**. Από τις σχέσεις (1) και (2), παίρνουμε :

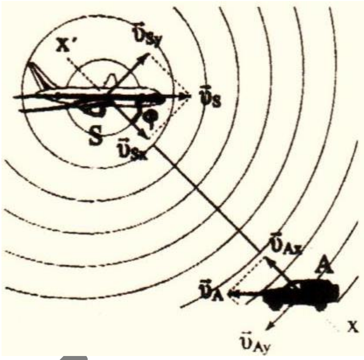
$$f_S\cdot t_S=f_A\cdot t_A \Leftrightarrow t_A=\frac{f_S}{f_A}\cdot t_S.$$

Όταν υπάρχει σχετική κίνηση πηγής και παρατηρητή, λόγω του φαινομένου Doppler, ισχύει $f_S\neq f_A$, άρα και $t_S\neq t_A$, αλλιώς αν τόσο η πηγή όσο και ο παρατηρητής είναι ακίνητοι, ισχύει $f_S=f_A$, άρα και $t_s=t_A$.

h. Σε ασκήσεις όπου ο ήχος **ανακλάται σε κατακόρυφο εμπόδιο** κινούμενο ή ακίνητο, θα αναλύουμε το όλο φαινόμενο σε δύο απλά βήματα. **1)** Θα μελετάμε την πρόσπτωση του ήχου στο εμπόδιο, θεωρώντας το ως ακίνητο παρατηρητή. Έτσι θα βρίσκουμε την **συχνότητα πρόπτωσης**. **2)** Η συχνότητα πρόσπτωσης θα είναι **ίση** με την συχνότητα ανάκλασης, γιατί η συχνότητα δεν μεταβάλλεται. Έτσι θεωρώντας τώρα το εμπόδιο ως ακίνητη πηγή που εκπέμπει ήχο συχνότητας όση η συχνότητα ανάκλασης, ολοκληρώνουμε την περιγραφή, βρίσκοντας την τελική συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής. Μπορεί υπό προϋποθέσεις, ο παρατηρητής να ακούει και διακροτήματα, γιατί θα αντιλαμβάνεται δύο ήχους. Τον άμεσο από την ηχητική πηγή και τον ήχο που προκύπτει μετά την ανάκλαση από το εμπόδιο.

i. Υπάρχει περίπτωση τόσο η πηγή όσο και ο παρατηρητής να εκτελούν ευθύγραμμα ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση. Τότε από τις γνωστές σχέσεις των κινήσεων θα αντικαθιστούμε την στιγμιαία τιμή της ταχύτητάς τους.

j. Υπάρχουν ασκήσεις κατά τις οποίες η πηγή και ο παρατηρητής κινούνται σε **διαφορετικές διευθύνσεις.** Στην περίπτωση αυτή αναλύουμε τις ταχύτητες $\vec{\upsilon}_A$ και $\vec{\upsilon}_S$ σε δύο ορθογώνιες συνιστώσες σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Ο άξονας xx' είναι αυτός που ορίζουν η πηγή S και ο παρατηρητής A την στιγμή που ακούει τον ήχο. Για παράδειγμα, έστω ότι ένα αεροπλάνο S πετάει οριζόντια με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_S$ και παράγει ήχο συχνότητας f_S. Ένας παρατηρητής A κινείται στο έδαφος αντίθετα με το αεροπλάνο με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_A$ και στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο. Η συχνότητα f_A που αντιλαμβάνεται θα είναι ίση με :



$$f_A = \frac{\upsilon + \upsilon_{A_x}}{\upsilon - \upsilon_{S_x}} = \frac{\upsilon + \upsilon_A \sigma\upsilon\nu\varphi}{\upsilon - \upsilon_S \sigma\upsilon\nu\varphi}.$$

k. Όλες οι ταχύτητες είναι μετρημένες ως προς το σύστημα αναφοράς του μέσου διάδοσης, δηλαδή του αέρα.

l. Ήχος μεγάλης συχνότητας ονομάζεται **οξύς,** ενώ ήχος μικρής συχνότητας **βαρύς.**

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

α/α	ΤΥΠΟΣ	ΕΡΜΗΝΕΙΑ
	ΚΡΟΥΣΕΙΣ	
1.	$\upsilon_1' = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}\upsilon_1 + \frac{2m_2}{(m_1 + m_2)}\upsilon_2$, $\upsilon_2' = \frac{2m_1}{(m_1 + m_2)}\upsilon_1 + \frac{(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)}\upsilon_2$.	Σχέσεις ταχυτήτων μετά από μία ελαστική και κεντρική κρούση.
2.	$\upsilon_1' = -\upsilon_1$, $\upsilon_2' = 0$.	Ταχύτητες μετά από κεντρική και ελαστική κρούση ενός σώματος μ' ένα άλλο ακίνητο πολύ μεγάλης μάζας.
3.	$\upsilon' = \upsilon$, $\theta_{\pi\rho.} = \theta_{\alpha\nu.}$.	Πλάγια κρούση σφαίρας σε τοίχο.
4.	$\alpha(\%) = \frac{K^{(\alpha\rho\chi.)} - K^{(\tau\epsilon\lambda.)}}{K^{(\alpha\rho\chi.)}} \cdot 100\%$.	Ποσοστό μείωσης της ενέργειας σε μια ανελαστική κρούση.
5.	$p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\sigma\upsilon\nu\varphi}$, $\varepsilon\varphi\theta = \frac{p_2\eta\mu\varphi}{p_1 + p_2\sigma\upsilon\nu\varphi}$.	Γενικής σχέσεις συνισταμένης ορμής.
6.	$\frac{dK}{dt} = F \cdot \upsilon \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$.	Ρυθμός μεταβολής κινητικής ενέργειας. **Θέλει απόδειξη.**
7.	$\frac{dU_{\varepsilon\lambda.}}{dt} = \pm F_{\varepsilon\lambda.} \cdot \upsilon$.	Ρυθμός μεταβολής δυναμικής ενέργειας ελατηρίου. **Θέλει απόδειξη.**
8.	$\frac{dU}{dt} = \pm m \cdot g \cdot \upsilon$.	Ρυθμός μεταβολής δυναμικής ενέργειας λόγω βαρύτητας σώματος. **Θέλει απόδειξη.**
9.	$\frac{dQ}{dt} = T \cdot \upsilon$.	Ρυθμός παραγωγής θερμότητας λόγω τριβής. **Θέλει απόδειξη.**
10.	$P = F \cdot \upsilon \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$.	Ισχύς δύναμης. **Θέλει απόδειξη.**

ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ DOPPLER		
11.	$f_A = \dfrac{\upsilon \pm \upsilon_A}{\upsilon \mp \upsilon_S} f_S$.	Γενική σχέση φαινομένου Doppler.
12.	$t_A = \dfrac{f_S}{f_A} \cdot t_S$.	Χρόνος που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής τα ηχητικά κύματα. **Θέλει απόδειξη.**

ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

Ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας ενός σώματος.

Έστω ότι ένα σώμα κινείται υπό την επίδραση μιας δύναμης $\vec{F}$ που ασκείται υπό γωνία φ σ' ένα σώμα. Τότε σε ελάχιστο χρονικό διάστημα θα έχει μεταβληθεί η κινητική ενέργεια κατά dK και το έργο της δύναμης κατά dW_F, ενώ με την βοήθεια του Θ.Μ.Κ.Ε. ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας θα είναι ίσος με :

$$dK = dW_F = F \cdot ds \cdot συνφ \Leftrightarrow \frac{dK}{dt} = F \cdot \frac{ds}{dt} \cdot συνφ \Leftrightarrow \frac{dK}{dt} = F \cdot \upsilon \cdot συνφ\ .$$

Ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας ελατηρίου.

Όπως γνωρίζουμε ένα παραμορφωμένο ελατήριο έχει δυναμική ενέργεια που δίνεται από την σχέση :

$$U_{ελ.} = \frac{1}{2} k \cdot x^2\ ,$$

ενώ το έργο της δύναμης επαναφοράς του ελατηρίου (δύναμη Hooke), δίνεται από την σχέση :

$$W_{F_{ελ.}} = U_{ελ.}^{(αρχ.)} - U_{ελ.}^{(τελ.)} = \frac{1}{2} k \cdot x_{αρχ.}^2 - \frac{1}{2} k \cdot x_{τελ.}^2\ .$$

Αν σε κάποιο μικρό χρονικό διάστημα το ελατήριο παραμορφώνεται κατά dx, το έργο της δύναμης του ελατηρίου θα είναι $dW_{F_{ελ.}}$ και η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου $dU_{ελ.}$. Επειδή η δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου είναι συντηρητική, θα ισχύει :

$$dW_{F_{ελ.}} = -dU_{ελ.} \Leftrightarrow dU_{ελ.} = -\left(F_{ελ.} \cdot dx \cdot συνφ\right) = \pm F_{ελ.} \cdot dx \Leftrightarrow \frac{dU_{ελ.}}{dt} = \pm F_{ελ.} \cdot \frac{dx}{dt} \Leftrightarrow \frac{dU_{ελ.}}{dt} = \pm F_{ελ.} \cdot \upsilon\ ,$$

όπου φ=0° ή 180° ανάλογα αν η ταχύτητα και η δύναμη επαναφοράς είναι αντίρροπες ή όχι, αντίστοιχα.

Ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας σώματος.

Έστω ότι ένα σώμα βάρους $\vec{w}$ κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω και την στιγμή t έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}$. Έστω ότι σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα έχει ανέβει κατά dy. Τότε το έργο του βάρους θα είναι dW_w και η μεταβολή της δυναμικής βαρυτικής του ενέργειας θα είναι dU. Επειδή το βάρος είναι συντηρητική δύναμη θα ισχύει :

$$dW_w = -dU \Leftrightarrow dU = -\left(m \cdot g \cdot dy \cdot συν180^\circ\right) = m \cdot g \cdot dy \Leftrightarrow \frac{dU}{dt} = m \cdot g \cdot \frac{dy}{dt} \Leftrightarrow \frac{dU}{dt} = m \cdot g \cdot \upsilon\ ,$$

δηλαδή αυξάνεται η βαρυτική δυναμική ενέργεια. Όταν κατεβαίνει θα είναι :

$$dW_w = -dU \Leftrightarrow dU = -\left(m \cdot g \cdot dy \cdot συν0^\circ\right) = -m \cdot g \cdot dy \Leftrightarrow \frac{dU}{dt} = -m \cdot g \cdot \frac{dy}{dt} \Leftrightarrow \frac{dU}{dt} = -m \cdot g \cdot \upsilon\ ,$$

δηλαδή μειώνεται η βαρυτική δυναμική ενέργεια.

Άρα γενικά ο ρυθμός μεταβολής της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας είναι :

$$\frac{dU}{dt} = \pm m \cdot g \cdot \upsilon .$$

Ρυθμός παραγωγής θερμότητας λόγω τριβής.

Έστω ένα σώμα κινείται σε επιφάνεια με την οποία παρουσιάζει τριβή. Τότε σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα το σώμα θα έχει μετατοπιστεί κατά ds, το έργο της τριβής θα είναι dW_T και η παραγόμενη θερμότητα dQ. Τότε θα ισχύει :

$$dQ = \left|dW_T\right| = T \cdot ds \Leftrightarrow \frac{dQ}{dt} = T \cdot \frac{ds}{dt} \Leftrightarrow \frac{dQ}{dt} = T \cdot \upsilon .$$

Ισχύς δύναμης.

Έστω ένα σώμα κινείται υπό την επίδραση μιας δύναμης $\vec{F}$ που ασκείται στο σώμα υπό γωνία φ. Τότε σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα, το σώμα θα έχει μετατοπιστεί κατά ds και το έργο της δύναμης θα είναι dW_F. Θα ισχύει :

$$dW_F = F \cdot ds \cdot συνφ \Leftrightarrow \frac{dW_F}{dt} = F \cdot \frac{ds}{dt} \cdot συνφ \Leftrightarrow \frac{dW_F}{dt} = F \cdot \upsilon \cdot συνφ \Leftrightarrow P = F \cdot \upsilon \cdot συνφ .$$

όπου P η ισχύς της δύναμης. Άρα αν η δύναμη είναι ομόρροπη της ταχύτητας (άρα και της μετατόπισης) φ=0° και $P = F \cdot \upsilon$ ενώ αν είναι αντίρροπη φ=180° και $P = -F \cdot \upsilon$.