ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

Ορισμός.

Ρευστό ονομάζεται μια ουσία που έχει την δυνατότητα να ρέει. Την ιδιότητα αυτή την έχουν τα υγρά και τα αέρια σώματα, σε αντίθεση με τα στερεά. Τα ρευστά δεν έχουν συγκεκριμένο σχήμα αλλά προσαρμόζονται στο σχήμα του δοχείου όπου τα βάζουμε. Τα υγρά είναι πρακτικά ασυμπίεστα, δηλαδή έχουν σταθερό όγκο, ενώ , αντίθετα τα αέρια είναι συμπιεστά δηλαδή μπορούμε να μεταβάλλουμε τον όγκο τους με μεταβολή της ασκούμενης πίεσης.

Πίεση.

Πίεση (P), ονομάζουμε το μονόμετρο μέγεθος που ισούται με το πηλίκο της κάθετης δύναμης μέτρου F που ασκείται σε μια επιφάνεια εμβαδού A, προς το εμβαδόν της επιφάνειας αυτής. Δηλαδή ισχύει η σχέση :

$$\mathbf{P = \frac{F_{\kappa\alpha\theta.}}{A}}.$$

Μονάδα μέτρησης της πίεσης στο S.I. ορίζεται το $1\,\frac{N}{m^2}$ (ή 1Pa, από το όνομα του Γάλλου επιστήμονα Pascal).

Στην περίπτωση όπου η δύναμη δεν ασκείται κάθετα στην επιφάνεια, θα πρέπει να αναλύσουμε την δύναμη στις συνιστώσες της και να χρησιμοποιήσουμε την κάθετη συνιστώσα στην επιφάνεια.

Υδροστατική Πίεση.

Όταν ένα σώμα είναι βυθισμένο μέσα σε υγρό πυκνότητας ρ, δέχεται μία πίεση από αυτό που ονομάζεται υδροστατική πίεση και οφείλεται στην βαρύτητα που δέχεται το βυθισμένο σώμα από τα υπερκείμενα στρώματα υγρού. Αν υποθέσουμε ότι το σώμα είναι βυθισμένο **σε βάθος h από την επιφάνεια του υγρού**, τότε η υδροστατική πίεση που δέχεται το σώμα υπολογίζεται με την βοήθεια της σχέσης :

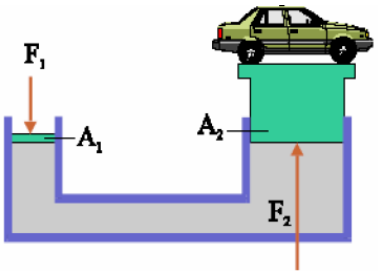
$$\mathbf{P_{\upsilon\delta\rho.} = \rho \cdot g \cdot h}.$$

όπου g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας. Παρατηρούμε ότι η υδροστατική πίεση εξαρτάται από **i)** το υγρό και **ii)** το βάθος στο οποίο είναι βυθισμένο το σώμα ενώ είναι ανεξάρτητη του σχήματος του σώματος, του σχήματος του δοχείου ή από την ποσότητα του υγρού.

Από τον θεμελιώδη νόμο της υδροστατικής πίεσης, συμπεραίνουμε πως στην επιφάνεια του υγρού η υδροστατική πίεση που δέχεται το σώμα είναι ίση με μηδέν, ενώ γίνεται μέγιστη στο βάθος h του δοχείου.

Η υδροστατική πίεση μετριέται με κατάλληλα όργανα που ονομάζονται μανόμετρα.

Αρχή του Pascal.



Η αρχή του Pascal αναφέρει ότι : «αν σε κάποιο σημείο ενός ρευστού, που βρίσκεται σε κάποιο δοχείο, μεταβάλλουμε την πίεση, τότε αυτή η μεταβολή μεταφέρεται σε όλα τα σημεία του ρευστού με τον ίδιο τρόπο». Βάσει της αρχής αυτής, βασίζεται η λειτουργίας των αντλιών, όπως φαίνεται στο σχήμα. Στην ουσία η αντλία είναι ένα σύστημα από δύο συγκοινωνούντα δοχεία με ρευστό, διαφορετικής διατομής. Αν ασκήσουμε μια δύναμη μέτρου F_1 στο έμβολο μικρής διατομής A_1, τότε θα μεταβληθεί ανάλογα η πίεση στο έμβολο μεγάλης διατομής. Άρα θα ισχύει

10ΤΕΛ ΔΡΑΠΕΤΣΩΝΑΣ

$$\Delta P_1 = \Delta P_2 \Rightarrow \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \Rightarrow F_2 = F_1 \cdot \frac{A_2}{A_1}.$$

Επειδή όμως $A_2 > A_1$, καταλαβαίνουμε ότι $F_2 > F_1$. Άρα ασκώντας μια μικρή δύναμη στο έμβολο μικρής διατομής, πετυχαίνουμε μεγάλη ανυψωτική δύναμη στο έμβολο μεγαλύτερης διατομής.

Πίεση σε υγρό ανοικτής επιφάνειας.

Όταν ένα σώμα είναι βυθισμένο σε βάθος h από την ελεύθερη επιφάνεια ενός υγρού πυκνότητας ρ, εκτός της υδροστατικής πίεσης που δέχεται λόγω βαρύτητας από το υγρό, δέχεται και πίεση από την ατμόσφαιρα, έξω από το ανοικτό δοχείο, με αποτέλεσμα η συνολική πίεση που δέχεται το σώμα να είναι ίση με :

$$P = P_{\text{ατμ.}} + P_{\text{υδρ.}} \Rightarrow P = P_{\text{ατμ.}} + \rho \cdot g \cdot h.$$

Η τελευταία σχέση αποτελεί τον **θεμελιώδη νόμο της υδροστατικής.** Να αναφέρουμε ότι ως $P_{\text{ατμ.}}$ λογίζεται η όποια εξωτερική, εκτός του ίδιου του ρευστού, πίεση που ασκείται σε αυτό.

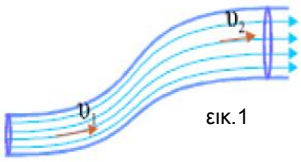
Ρευστά σε Κίνηση.

Όταν τα ρευστά κινούνται, αναπτύσσονται δυνάμεις τριβής ανάμεσα στα μόριά τους, που ονομάζονται εσωτερικές τριβές, αλλά και μεταξύ των μορίων τους και των τοιχωμάτων του σωλήνα στον οποίο ρέουν. Αν οι τριβές υπερ-βούν κάποιο όριο, εμφανίζονται δίνες (στρόβιλοι) και η ροή λέγεται **τυρβώδης** ή **στροβιλώδης**.

Ως ιδανικά ρευστά θεωρούμε αυτά που είναι ασυμπίεστα και επιπλέον δεν υπάρχουν οι παραπάνω τριβές, οπότε δεν εμφανίζονται δίνες. Τότε, η ροή ονομάζεται **στρωτή**.

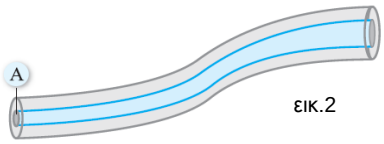
Ρευματικές γραμμές - Φλέβα – Παροχή.

Θεωρούμε ένα σωλήνα, ο οποίος διαρρέεται από ρευστό (υγρό ή αέριο). Η τροχιά του κάθε μορίου του ρευστού μέσα στο σωλήνα λέγεται ρευματική γραμμή. Η ταχύτητα του μορίου στο οποίο αντιστοιχεί μία ρευματική τροχιά είναι η εφαπτομένη στη ρευματική τροχιά. Αυτό σημαίνει ότι δύο ρευματικές τροχιές δε μπορούν να τέμνονται. (εικ. 1)



εικ.1

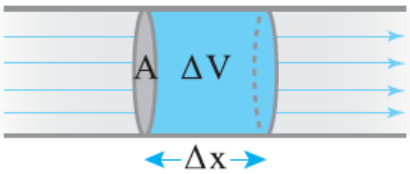
Ένα σύνολο από διαδοχικές ρευματικές τροχιές συνιστούν ένα νοητό σωλήνα, διατομής Α μέσα στο ρευστό, που ονομάζεται φλέβα. (εικ. 2)



εικ.2

Από τη διατομή εμβαδού Α σε χρόνο Δt διέρχεται ρευστό όγκου ΔV. Ορίζουμε ως **παροχή Π** του σωλήνα το πηλίκο :

$$\Pi = \frac{\Delta V}{\Delta t}.$$



Η μονάδα μέτρησης της παροχής στο S.I., είναι το m^3/s.

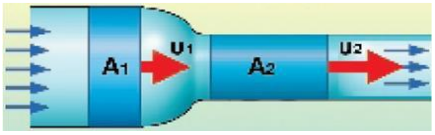
Αν στο χρονικό διάστημα Δt το ρευστό «διατρέχει» απόσταση Δx, τότε $\Delta V = A \cdot \Delta x$, οπότε :

$$\Pi = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{A \cdot \Delta x}{\Delta t} = A \cdot \upsilon \Rightarrow \Pi = A \cdot \upsilon.$$

όπου υ είναι η ταχύτητα του ρευστού. Επομένως, η παροχή ενός σωλήνα που διαρρέεται από ρευστό, ισούται με το γινόμενο της διατομής του σωλήνα επί την ταχύτητα του ρευστού.

ΙΩΑΝΝΗΣ ΣΑΡΑΠΕΤΣΩΝΑΣ

Εξίσωση Συνέχειας.

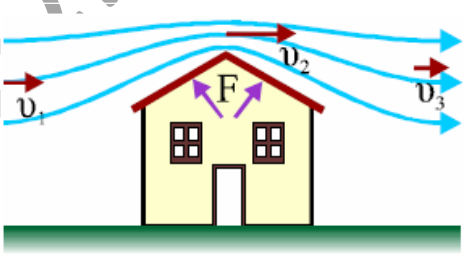


Έστω ένα ασυμπίεστο (άρα σε κάθε σημείο του ρευστού η πυκνότητα είναι σταθερή) και ιδανικό ρευστό που μεταβαίνει από ένα σωλήνα διατομής A_1 σε έναν σωλήνα διατομής A_2. Στο εσωτερικό του ρευματικού σωλήνα δεν υπάρχουν πηγές που να παρέχουν ρευστό, ούτε καταβόθρες που να απορροφούν ρευστό. Συνεπώς η μάζα του ρευστού που περιέχει ο σωλήνας είναι σταθερή. Οπότε, η μάζα Δm_1 του ρευστού που εισρέει στον σωλήνα από την διατομή A_1 είναι ίση με τη μάζα Δm_2 του ρευστού που εκρέει από την διατομή A_2. Η παροχή στους δύο σωλήνες είναι η ίδια (διότι ο όγκος του ρευστού για ίσα χρονικά διαστήματα είναι σταθερός). Επομένως:

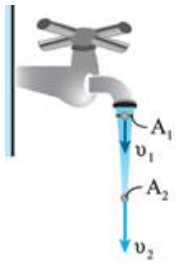
$$\Pi_1 = \Pi_2 \Rightarrow A_1 \cdot \upsilon_1 = A_2 \cdot \upsilon_2 .$$

Η παραπάνω εξίσωση λέγεται **εξίσωση συνέχειας** και είναι απόρροια της αρχής διατήρησης της μάζας. Από την εξίσωση συνέχειας προκύπτει πως <u>αν το ρευστό μεταβαίνει σε σωλήνα μικρότερης διατομής, θα έχει μεγαλύτερη ταχύτητα</u>, ώστε το γινόμενο Αυ να παραμείνει σταθερό <u>και οι ρευματικές γραμμές πυκνώνουν</u>.

<u>Παραδείγματα :</u>

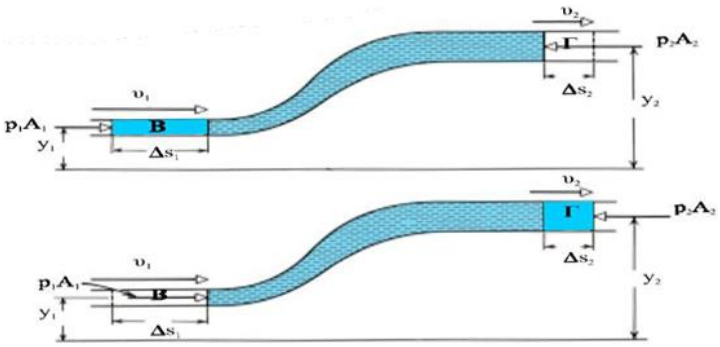


- Όταν ο άνεμος περνά πάνω από την κεκλιμένη οροφή σπιτιού, η ταχύτητά του αυξάνεται επειδή «στενεύει ο δρόμος του». Έτσι, αν ο άνεμος είναι ισχυρός, τότε πάνω από τη οροφή θα γίνει ακόμα πιο ισχυρός, με αποτέλεσμα να υπάρχει κίνδυνος να ξηλωθεί η οροφή.
- Επίσης, κατά την ροή ενός ποταμού σταθερού βάθους, εκεί που η κοίτη του ποταμού στενεύει, τα νερά γίνονται πιο ορμητικά (μικρή διατομή Α, άρα μεγαλύτερη ταχύτητα υ). Αντίθετα, στην πλατιά κοίτη.
- Ανάλογα, κατά την ροή ενός ποταμού σταθερού πλάτους, εκεί που το βάθος είναι μεγάλο, το νερό κυλάει αργά σε αντίθεση στις ρηχές περιοχές, π.χ. tsunami.



- Καθώς το νερό τρέχει από την βρύση το μέτρο της ταχύτητάς του αυξάνεται λόγω του ότι η δυναμική ενέργειά του μετατρέπεται σε αυξανόμενη κινητική λόγω της πτώσης. Έτσι, και γιατί επειδή η παροχή της βρύσης είναι σταθερή, πέφτοντας το νερό, μειώνεται η οριζόντια διατομή της φλέβας.

Διατήρηση Ενέργειας – Εξίσωση Bernoulli.



Θεωρούμε ένα ρευστό που ρέει σε σωλήνα μεταβλητής διατομής. Έστω ένα τμήμα του ρευστού που μεταφέρεται από την περιοχή Β στην περιοχή Γ του σωλήνα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, με τη βοήθεια εξωτε-ρικού έργου W. Το έργο που προσφέρεται από το περι-βάλλον στο ρευστό υπολογίζεται από τη σχέση :

$$W = P_1 \cdot A_1 \cdot \Delta S_1 - P_2 \cdot A_2 \cdot \Delta S_2 = P_1 \cdot \Delta V - P_2 \cdot \Delta V = (P_1 - P_2) \cdot \Delta V .$$

όπου P_1 και P_2 οι πιέσεις του ρευστού στις περιοχές Β και Γ, αντίστοιχα, A_1 και A_2 οι διατομές του σωλήνα στις περιοχές Β και Γ, αντίστοιχα και $\Delta V = A_1 \cdot \Delta S_1 = A_2 \cdot \Delta S_2$ είναι ο όγκος του ρευστού στην περιοχή Β ή Γ.

1ο ΓΕΛ ΔΡΑΠΕΤΣΩΝΑΣ

Το έργο του βάρους κατά τη διαδρομή Β $\rightarrow$ Γ είναι :

$$W_w = -\Delta m \cdot g \cdot (y_2 - y_1) = -\rho \cdot \Delta V \cdot g \cdot (y_2 - y_1),$$

όπου Δm ο όγκος του ρευστού στην περιοχή Β ή Γ και y_1, y_2 τα ύψη του ρευστού στις περιοχές Β και Γ, αντίστοιχα.

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του τμήματος του ρευστού από την περιοχή Β έως την περιοχή Γ είναι :

$$\Delta K = \frac{1}{2}\Delta m \cdot \upsilon_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m \cdot \upsilon_1^2 = \frac{1}{2}\Delta m \cdot (\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2) = \frac{1}{2}\rho \cdot \Delta V \cdot (\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2),$$

όπου υ_1, υ_2 τα μέτρα των ταχυτήτων του τμήματος του ρευστού στις περιοχές Β και Γ, αντίστοιχα.

Εφαρμόζοντας το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.) για τη διαδρομή Β $\rightarrow$ Γ, παίρνουμε :

$$\Delta K = W + W_W \Rightarrow \frac{1}{2}\rho \cdot \Delta V \cdot (\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2) = (P_1 - P_2) \cdot \Delta V - \rho \cdot \Delta V \cdot g \cdot (y_2 - y_1) \Rightarrow$$

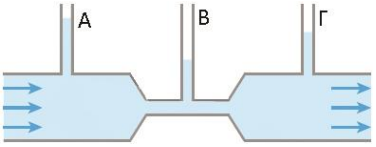
$$P_1 + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_1^2 + \rho \cdot g \cdot y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_2^2 + \rho \cdot g \cdot y_2 \Rightarrow$$

$$\mathbf{P + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon^2 + \rho \cdot g \cdot y = \text{σταθερό}.}$$

Η παραπάνω εξίσωση αποτελεί την **εξίσωση του Bernoulli** για <u>ιδανικό ρευστό</u>, σύμφωνα με την οποία :

το άθροισμα της πίεσης (P), της κινητικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου ($\frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon^2$) και της δυναμικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου ($\rho \cdot g \cdot y$) είναι σταθερό για οποιοδήποτε σημείο μιας ρευματικής γραμμής.

Δηλαδή, η εξίσωση του Bernoulli αποτελεί μία έκφραση της αρχής διατήρησης της ενέργειας στη ροή των ρευστών. Αν ο σωλήνας είναι οριζόντιος, τότε η δυναμική ενέργεια ανά μονάδα όγκου είναι σταθερή. Τότε, η εξίσωση του Bernoulli, γράφεται :

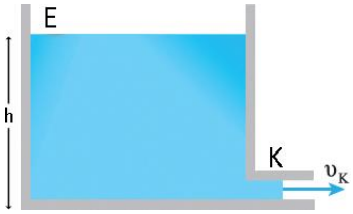


$$\mathbf{P + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon^2 = \text{σταθερό}.}$$

Άρα στο στενό μέρος του σωλήνα, όπου πυκνώνουν οι ρευματικές γραμμές, η ταχύτητα ροής αυξάνεται, οπότε μειώνεται η πίεση. Το ύψος της στάθμης του υγρού πάνω από την περιοχή αυτή, δείχνει ότι η πίεση στον σωλήνα είναι μικρότερη. Δηλαδή, σε περιοχή μεγάλης ταχύτητας δημιουργούνται μικρές πιέσεις και αντίστροφα.

Να επισημανθεί ότι ο νόμος Bernoulli, είναι γενικός τύπος και περιγράφει την όποια κατάσταση του ρευστού. Για παράδειγμα, όταν το ρευστό δεν κινείται, ο νόμος του Bernoulli παίρνει την μορφή : $P + \rho \cdot g \cdot y = \text{σταθερό}$, που αποτελεί τον θεμελιώδη νόμο της υδροστατικής.

Θεώρημα του Torricelli.



Το δοχείο του διπλανού σχήματος έχει μεγάλες διαστάσεις και η ελεύθερη επιφάνειά του βρίσκεται σε ύψος h από τον πυθμένα, στον οποίο υπάρχει ένα στόμιο εκροής. Εφαρμόζοντας την εξίσωση του Bernoulli για τις θέσεις Ε (ελεύθερη επιφάνεια) και Κ (στόμιο εκροής), παίρνουμε :

$$P_E + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_E^2 + \rho \cdot g \cdot h = P_K + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_K^2.$$

Επειδή το ρευστό στα σημεία Ε και Κ έρχεται σε επαφή με την ατμόσφαιρα, η πίεση που εμφανίζουν τα σημεία

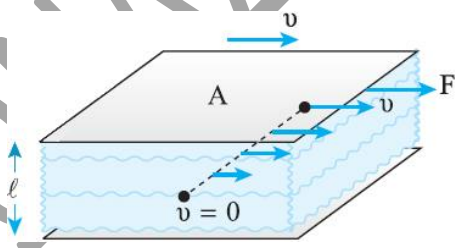
10ΤΕΑ ΔΡΑΠΕΤΣΩΝΑΣ

είναι ίση με την ατμοσφαιρική. Οπότε $P_E = P_K = P_{ατμ.}$. Θεωρώντας ότι η ελεύθερη στάθμη του σημείου Ε πέφτει με μικρότερη ταχύτητα από αυτή με την οποία εκρέει στο σημείο Κ, μπορούμε να υποθέσουμε προσεγγιστικά ότι $υ_E$=0.(Η παραπάνω προσέγγιση είναι αρκετά ρεαλιστική εφαρμόζοντας την εξίσωση της συνέχειας). Οπότε η εξίσωση του Bernoulli, θα δώσει τότε :

$$\rho \cdot g \cdot h = \frac{1}{2}\rho \cdot υ_K^2 \Rightarrow g \cdot h = \frac{1}{2}υ_K^2 \Rightarrow \mathbf{υ_K = \sqrt{2g \cdot h}}\ .$$

Η τελευταία σχέση αποτελεί την μαθηματική έκφραση του νόμου του Torricelli που αναφέρει : «η ταχύτητα εκροής υγρού από στόμιο που βρίσκεται σε βάθος h από την ελεύθερη επιφάνειά του είναι ίση με την ταχύτητα που θα είχε το υγρό αν έπεφτε ελεύθερα από ύψος h».

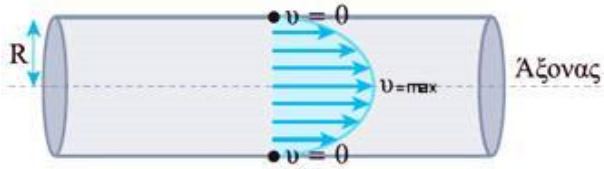
Εσωτερική Τριβή στα Ρευστά (Ιξώδες).



Θεωρούμε δύο οριζόντιες πλάκες εμβαδού Α. κρατάμε ακινητοποιημένη την κάτω πλάκα και απλώνουμε πάνω της ένα στρώμα ρευστού, π.χ. μέλι, πάχους ℓ. Τοποθετούμε την δεύτερη πλάκα πάνω από την επιφάνεια του ρευστού και ασκώντας της δύναμη μέτρου F, την αναγκάζουμε να κινηθεί με σταθερή ταχύτητα. Παρατηρώντας την κίνηση της πλάκας, παρατηρούμε ότι το ανώτερο στρώμα του ρευστού έχει προσκολληθεί στην πάνω πλάκα και κινείται ισοταχώς μαζί της, ενώ το κατώτερο στρώμα του ρευστού έχει προσκολληθεί στην ακίνητη κάτω πλάκα και παραμένει και αυτό ακίνητο. Όλα τα ενδιάμεσα στρώματα του ρευστού έχουν ταχύτητες μεταξύ $0 \rightarrow υ$. Από την μελέτη του φαινομένου καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι μεταξύ των στρωμάτων ενός ρευστού που ρέει με ταχύτητα υ ανάμεσα σε δύο πλάκες εμβαδού Α, οι οποίες απέχουν απόσταση ℓ, εμφανίζεται τριβή (ιξώδες), της οποίας το μέτρο ισούται με :

$$\mathbf{F = η \cdot A \cdot \frac{υ}{\ell}},$$

όπου η είναι ένα χαρακτηριστικό μέγεθος του ρευστού, που ονομάζεται **συντελεστής ιξώδους**. Η μονάδα μέτρησης του συντελεστή ιξώδους στο S.I. είναι το 1poise (πουάζ)=1 $\frac{N \cdot s}{m^2}$. Ο συντελεστής ιξώδους του ρευστού, εξαρτάται από την θερμοκρασία. Με την αύξηση της θερμοκρασίας, ο συντελεστής ιξώδους στα υγρά μειώνεται, ενώ στα αέρια αυξάνεται.



Την δύναμη την ασκούσαμε, επομένως, για να αντισταθμίσουμε αυτές τις εσωτερικές δυνάμεις τριβής που εμφανίζουν τα διάφορα επίπεδα του ρευστού μεταξύ τους και να κινείται η πάνω πλάκα με σταθερή ταχύτητα.

Τα ρευστά που υπακούουν την τελευταία σχέση ονομάζονται νευτώνεια ρευστά. Στα ρευστά αυτά υπάρχει γραμμική αναλογία ανάμεσα στην εσωτερική τριβή που παρουσιάζουν κατά την ροή τους και στην ταχύτητα ροής.

Στην περίπτωση όπου το νευτώνειο ρευστό ρέει σε κυλινδρικό σωλήνα, η αντίστοιχη κατανομή των ταχυτήτων των διαφόρων στρωμάτων του ρευστού, φαίνεται στο σχήμα. Παρατηρούμε ότι τα στρώματα του ρευστού που έρχονται σε επαφή με τα τοιχώματα του σωλήνα παρουσιάζουν ταχύτητα ίση με μηδέν, ενώ το κεντρικό στρώμα του ρευστού που συμπίπτει με τον άξονα του κυλινδρικού σωλήνα παρουσιάζει την μεγαλύτερη ταχύτητα.

10ΓΕΛΔΡΑΠΕΤΣΩΝΑΣ

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

Α/Α	ΤΥΠΟΣ	ΕΡΜΗΝΕΙΑ
1.	$\rho = \frac{m}{V}$.	Πυκνότητα. Η πυκνότητα συμβολίζεται και με d.
2.	$P = \frac{F_{\kappa\alpha\theta.}}{A}$.	Ορισμός πίεσης.
3.	$P_{\upsilon\delta\rho.} = \rho \cdot g \cdot h$.	Ολική πίεση ρευστού σε βάθος h.
4.	$P = P_{\alpha\tau\mu.} + P_{\upsilon\delta\rho.} = P_{\alpha\tau\mu.} + \rho \cdot g \cdot h$.	Θεμελιώδης νόμος υδροστατικής πίεσης.
5.	$\Delta P_1 = \Delta P_2 \Rightarrow \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \Rightarrow F_2 = F_1 \cdot \frac{A_2}{A_1}$.	Αρχή Pascal.
6.	$\Pi = \frac{\Delta V}{\Delta t}$ ή $\Pi = A \cdot \upsilon$.	Παροχή σωλήνα.
7.	$\Pi_1 = \Pi_2 \Rightarrow A_1 \cdot \upsilon_1 = A_2 \cdot \upsilon_2$.	Εξίσωση συνέχειας.
8.	$P + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon^2 + \rho \cdot g \cdot y =$ σταθερό.	Εξίσωση Bernoulli.
9.	$\upsilon = \sqrt{2g \cdot h}$.	Εξίσωση Torricelli.
10.	$F = \eta \cdot A \cdot \frac{\upsilon}{\ell}$.	Δύναμη εσωτερικής τριβής (ιξώδες).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Η πυκνότητα ενός ρευστού σε ένα σημείο του είναι $\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}$. Στην περίπτωση που ένα ρευστό είναι ασυμπίεστο, τότε $\rho = \frac{m}{V}$ =σταθ., δηλαδή η πυκνότητα είναι η ίδια σε όλη την έκτασή του.

- Η πίεση ενός ρευστού σε ένα σημείο του είναι $P = \frac{\Delta F}{\Delta A}$, με την $\Delta\vec{F}$ να ασκείται κάθετα στην επιφάνεια εμβαδού ΔΑ. Στην περίπτωση που η δύναμη μέτρου F ασκείται κάθετα σε όλα τα σημεία επίπεδης επιφάνειας εμβαδού Α, δηλαδή είναι ισοκατανεμημένη, είναι $P = \frac{F_{\kappa\alpha\theta}}{A}$.

- Η υδροστατική πίεση $P_{\upsilon\delta\rho.}$ σε δεδομένο βάθος h του υγρού εξαρτάται μόνο από το βάθος αυτού του σημείου και όχι από κάποια οριζόντια διάσταση του υγρού ή του δοχείου που το περιέχει. Η υδροστατική πίεση $P_{\upsilon\delta\rho.}$ σε ένα σημείο του υγρού είναι ανεξάρτητη από το σχήμα του δοχείου.

- Η εξίσωση $A_1 \cdot \upsilon_1 = A_2 \cdot \upsilon_2$ ή $\Pi_1 = \Pi_2$ αποτελεί την εξίσωση της συνέχειας και ισχύει μόνο για ιδανικό ρευστό.

- Η εξίσωση $P_1 + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_1^2 + \rho \cdot g \cdot y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_2^2 + \rho \cdot g \cdot y_2$, αποτελεί τον νόμο του Bernoulli και ισχύει μόνο για ιδανικό ρευστό.

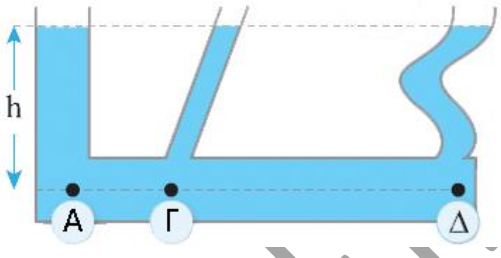
1ο ΓΕΛ ΔΙΚΑΙΟΥ ΠΑΠΕΤΣΩΝΑΣ

— Όταν ο σωλήνας είναι οριζόντιος, όπου δεν υπάρχει υψομετρική διαφορά, επειδή $y_1 = y_2 = 0$, η εξίσωση του Bernoulli παίρνει τη μορφή $P_1 + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_2^2$.

— Όταν το ρευστό δεν κινείται, επειδή $\upsilon_1 = \upsilon_2 = 0$, η εξίσωση του Bernoulli παίρνει τη μορφή $P_1 + \rho \cdot g \cdot y_1 = P_2 + \rho \cdot g \cdot y_2$ (νόμος της υδροστατικής).

- Το εμβαδόν κύκλου ακτίνας R και διαμέτρου δ είναι $A = \pi \cdot R^2 = \pi \frac{\delta^2}{4}$.
- Ο όγκος κυλίνδρου είναι $V = A \cdot h = \pi \cdot R^2 \cdot h$.
- Η ελεύθερη επιφάνεια υγρού που ισορροπεί είναι ένα οριζόντιο επίπεδο, λόγω του ότι η υδροστατική πίεση εξαρτάται μόνο από το βάθος που βρίσκεται το σημείο και είναι ανεξάρτητη του σχήματος του δοχείου ($P_{υδ.} = \rho \cdot g \cdot h$)

Η τελευταία πρόταση αποτελεί την αρχή των συγκοινωνούντων δοχείων.



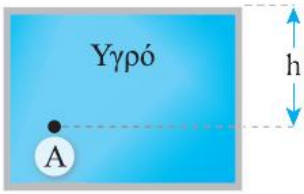
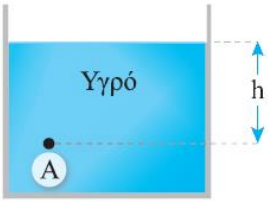
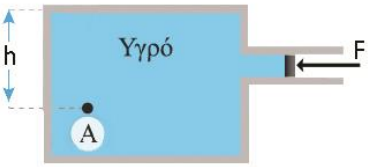
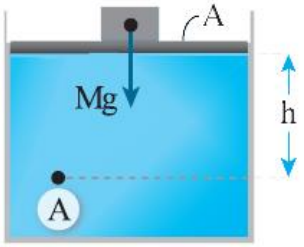
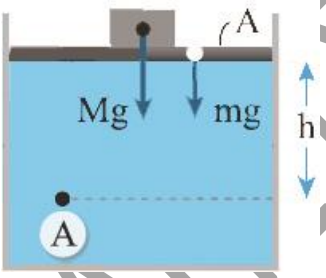
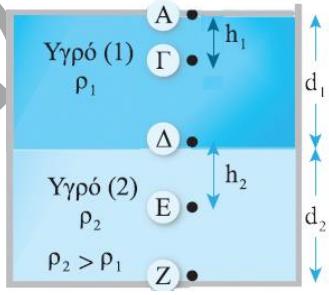
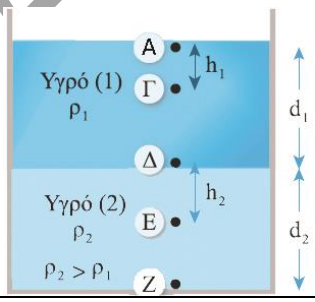
$$P_A = P_Γ = P_Δ = P_{ατμ.} + \rho \cdot g \cdot h$$

1ο ΓΕΛ ΔΡΑΠΕΤΣΩΝΑΣ

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

Α. ΥΓΡΑ ΣΕ ΙΣΣΟΡΟΠΙΑ

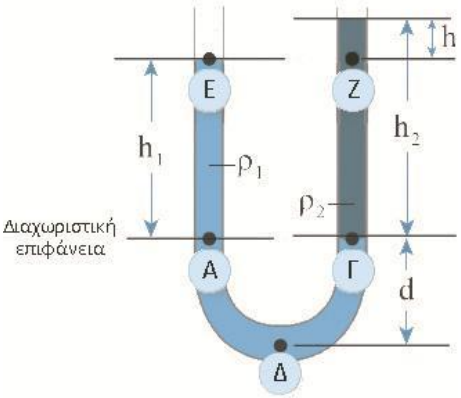
- **ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ ΠΙΕΣΗ – ΑΡΧΗ PASCAL**

1. ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΟΧΕΙΟ	2. ΑΝΟΙΧΤΟ ΔΟΧΕΙΟ	3. ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΟΧΕΙΟ
 $P_A = P_{υδ.} = \rho \cdot g \cdot h.$	 $P_A = P_{ατ.} + P_{υδ.} = P_{ατ.} + \rho \cdot g \cdot h$	 $P_A = P_{εξ.} + P_{υδ.} = \frac{F}{A} + \rho \cdot g \cdot h$
4. ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΟΧΕΙΟ ΜΕ ΑΒΑΡΕΣ ΕΜΒΟΛΟ ΕΜΒΑΔΟΥ Α	**5. ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΟΧΕΙΟ ΜΕ ΕΜΒΟΛΟ ΜΑΖΑΣ m ΚΑΙ ΕΜΒΑΔΟΥ Α**	**6. ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΟΧΕΙΟ ΜΕ ΔΥΟ ΜΗ ΑΝΑΜΕΙΓΝΥΟΜΕΝΑ ΥΓΡΑ**
 $P_A = P_{εξ.} + P_{υδ.} = \frac{M \cdot g}{A} + \rho \cdot g \cdot h.$	 $P_A = P_{εξ.} + P_{υδ.} = \frac{(M+m) \cdot g}{A} + \rho \cdot g \cdot h.$	 $P_A = 0, P_Γ = \rho_1 \cdot g \cdot h_1, P_Δ = \rho_1 \cdot g \cdot d_1$ $P_E = \rho_1 \cdot g \cdot d_1 + \rho_2 \cdot g \cdot h_2$ $P_Z = \rho_1 \cdot g \cdot d_1 + \rho_2 \cdot g \cdot d_2$
7. ΑΝΟΙΚΤΟ ΔΟΧΕΙΟ ΜΕ ΔΥΟ ΜΗ ΑΝΑΜΕΙΓΝΥΟΜΕΝΑ ΥΓΡΑ		
 $P_A = P_{ατμ.}, P_Γ = P_{ατμ.} + \rho_1 \cdot g \cdot h_1, P_Δ = P_{ατμ.} + \rho_1 \cdot g \cdot d_1$ $P_E = P_{ατμ.} + \rho_1 \cdot g \cdot d_1 + \rho_2 \cdot g \cdot h_2$ $P_Z = P_{ατμ.} + \rho_1 \cdot g \cdot d_1 + \rho_2 \cdot g \cdot d_2$		

1ο ΓΕΛ ΔΡΑΠΕΤΣΩΝΑΣ

Β. ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΔΥΟ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΩΝ ΠΥΚΝΟΤΗΤΩΝ ΚΑΙ ΜΗ ΑΝΑΜΕΙΓΝΥΟΜΕΝΩΝ ΥΓΡΩΝ

- **Πάνω από την διαχωριστική επιφάνεια δύο μη αναμειγνυόμενων υγρών ισχύει $\frac{h_1}{h_2}=\frac{\rho_2}{\rho_1}$.**



Για την πίεση του σημείου Δ, έχουμε :

$P_\Delta = P_{\alpha\tau\mu.} + \rho_1 \cdot g \cdot (h_1 + d) \Rightarrow P_\Delta = P_{\alpha\tau\mu.} + \rho_1 \cdot g \cdot h_1 + \rho_1 \cdot g \cdot d \qquad (1)$

$P_\Delta = P_{\alpha\tau\mu.} + \rho_2 \cdot g \cdot h_2 + \rho_1 \cdot g \cdot d \quad (2)$. Από τις (1) και (2), προκύπτει :

$P_{\alpha\tau\mu.} + \rho_1 \cdot g \cdot h_1 + \rho_1 \cdot g \cdot d = P_{\alpha\tau\mu.} + \rho_2 \cdot g \cdot h_2 + \rho_1 \cdot g \cdot d \Rightarrow \quad \rho_1 \cdot g \cdot h_1 = \rho_2 \cdot g \cdot h_2 \; (3) \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}. \qquad (4)$

- **Οι ελεύθερες επιφάνειές τους δε βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.**
- **Σημεία που βρίσκονται στο ίδιο υγρό και στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο έχουν ίσες πιέσεις ($P_A=P_\Gamma$).**

Έχουμε $P_A = P_{\alpha\tau\mu.} + \rho_1 \cdot g \cdot h_1$ και $P_\Gamma = P_{\alpha\tau\mu.} + \rho_2 \cdot g \cdot h_2 \overset{(3)}{=} P_{\alpha\tau\mu.} + \rho_1 \cdot g \cdot h_1 \Rightarrow P_A = P_\Gamma$.

- **Σημεία που βρίσκονται σε διαφορετικά υγρά και στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο έχουν διαφορετικές πιέσεις ($P_E \neq P_Z$).**

Έχουμε $P_E = P_{\alpha\tau\mu.}$ και $P_Z = P_{\alpha\tau\mu.} + \rho_2 \cdot g \cdot h$. Άρα $P_E \neq P_Z$.

1ο ΓΕΛ ΔΡΑΠΕΤΣΩΝΑΣ