ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

Τι ονομάζουμε υλικό σημείο και τι υλικό σώμα ;

Ένα μικρό σώμα που έχει όλες τις ιδιότητες της ύλης, εκτός από διαστάσεις, ονομάζεται **υλικό σημείο**. Το υλικό σημείο, αφού δεν έχει διαστάσεις, το συμβολίζουμε με ένα σημείο και μπορεί να εκτελεί **μόνο μεταφορικές κινήσεις.**

Τι γίνεται όμως με σώματα, όπως ο τροχός ενός ποδηλάτου, τα οποία έχουν διαστάσεις ;

Τέτοια σώματα δεν μπορούν να παρασταθούν σαν υλικά σημεία. Καθένα από αυτά αποτελεί ένα στερεό σώμα το οποίο μπορεί και να περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα.

Τα πραγματικά σώματα είναι γενικά πολύπλοκα. Οι δυνάμεις που ασκούνται σ' αυτά, μπορούν να τα παραμορφώσουν μόνιμα η προσωρινά. Στο κεφάλαιο αυτό, θα αγνοήσουμε αυτές τις παραμορφώσεις και θα θεωρήσουμε ότι το σώμα έχει **καθορισμένο και αμετάβλητο σχήμα και μέγεθος.**

Αυτό το εξιδανικευμένο μοντέλο το ονομάζουμε **στερεό σώμα.**

Οι κινήσεις των στερεών σωμάτων.

Σε κάθε στερεό σώμα υπάρχει ένα σημείο που ονομάζεται **κέντρο μάζας** του στερεού.

Κέντρο μάζας (cm) του στερεού σώματος ονομάζεται το σημείο εκείνο του σώματος που κινείται όπως ένα υλικό σημείο, με μάζα ίση με τη μάζα του σώματος, αν σ' αυτό ασκούνταν όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα.

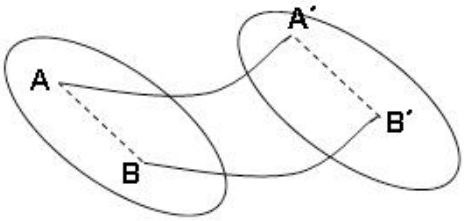
Στα ομογενή και συμμετρικά σώματα, το κέντρο μάζας συμπίπτει με το κέντρο συμμετρίας τους. Έτσι το κέντρο μάζας (cm) μιας σφαίρας είναι το κέντρο της σφαίρας, ενώ το cm ενός κύβου είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του. Το cm όμως μπορεί να βρίσκεται και έξω από το σώμα. Για παράδειγμα, σ' έναν ομογενή και ισοπαχή δακτύλιο το cm βρίσκεται στο κέντρο του.

Ένα στερεό σώμα μπορεί γενικά να εκτελεί τα παρακάτω είδη κίνησης : **α)** μεταφορική, **β)** στροφική και **γ)** συνδυασμό μεταφορικής και στροφικής κίνησης.

Χαρακτηριστικά της μεταφορικής κίνησης.

Ένα υλικό σημείο, όπως έχουμε πει και παραπάνω, μπορεί να εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση. Για το σημείο αυτό ισχύουν όλοι οι νόμοι και οι εξισώσεις της κίνησης.

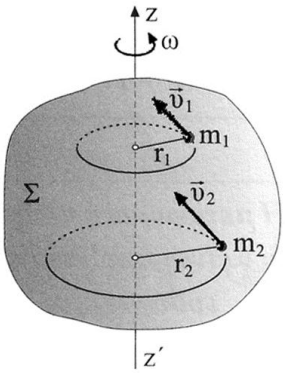
Για να εκτελεί ένα στερεό σώμα μεταφορική κίνηση, θα πρέπει όλα τα σημεία του να έχουν την ίδια ταχύτητα. Μια μεταφορική κίνηση μπορεί να μην είναι ευθύγραμμη. Και σε αυτή την περίπτωση όλα τα σημεία του στερεού πρέπει να έχουν την ίδια ταχύτητα. Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει το ευθύγραμμο τμήμα (ΑΒ) που συνδέει δύο τυχαία σημεία του στερεού να παραμένει πάντα παράλληλο προς τον εαυτό του.



Τα χαρακτηριστικά της μεταφορικής κίνησης φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ			
Σώμα	**Είδος Κίνησης**	**Περιγραφή**	**Χαρακτηριστικά**
Υλικό σημείο ή στερεό σώμα.	Ομαλή (υ=σταθ.) ή ομαλά μεταβαλλόμενη (α=σταθ.). Ευθύγραμμη ή καμπυλόγραμμη.	Ισχύουν όλοι οι νόμοι και οι εξισώσεις κίνησης.	Όλα τα σημεία του στερεού σώματος έχουν την ίδια ταχύτητα, την ίδια χρονική στιγμή.

Χαρακτηριστικά της στροφικής κίνησης.



Θεωρούμε **ένα στερεό σώμα το οποίο περιστρέφεται γύρω από έναν ακλόνητο άξονα με αποτέλεσμα να μεταβάλλεται συνεχώς ο προσανατολισμός του.** Τότε λέμε ότι το σώμα εκτελεί στροφική κίνηση. Σε κάθε στροφική κίνηση υπάρχει ένας άξονας που ονομάζεται άξονας περιστροφής. Όλα τα σημεία του στερεού έχουν ταχύτητα που εφάπτεται της κυκλικής τους τροχιάς (γραμμική ταχύτητα), εκτός αυτών που ανήκουν στον άξονα περιστροφής.

Ονομάζουμε **επιβατική ακτίνα** ενός σημείου, την ακτίνα που συνδέει το κέντρο της τροχιάς με το σημείο αυτό. Κατά την στροφική κίνηση του στερεού, αυτή η ακτίνα μετατοπίζεται συνεχώς και έτσι διαγράφεται μια **επίκεντρη γωνία,** η οποία κατά την διάρκεια της κίνησης του σώματος, συνεχώς αυξάνεται. Μπορούμε να περιγράψουμε την περιστροφή του στερεού με το ρυθμό μεταβολής της παραπάνω γωνίας.

Έστω ότι τη χρονική στιγμή t_1 το στερεό έχει διαγράψει γωνία θ_1 και τη χρονική στιγμή t_2 γωνία θ_2. Τότε σε χρονικό διάστημα Δt θα έχει διαγράψει γωνία Δθ.

Ορίζουμε ως **γωνιακή ταχύτητα** $\vec{\omega}$ του σώματος, το πηλίκο της γωνιακής μετατόπισης $\Delta\theta=\theta_2-\theta_1$ προς το χρόνο $\Delta t=t_2-t_1$ που έγινε η παραπάνω μετατόπιση. Δηλαδή κατά μέτρο :

$$\omega = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} \Leftrightarrow \omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}.$$

Για πολύ μικρά χρονικά διαστήματα ($\Delta t \to 0$) η γωνιακή ταχύτητα είναι :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}.$$

Μονάδα γωνιακής ταχύτητας είναι το 1 rad/s.

Όταν η γωνιακή ταχύτητα του σώματος είναι σταθερή, τότε αυτό εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση.

Η διεύθυνση της γωνιακής ταχύτητας είναι πάνω στον άξονα περιστροφής, ενώ η φορά της καθορίζεται με την βοήθεια του δεξιού μας χεριού. Αν τα δάκτυλα τείνουν προς την διεύθυνση της κίνησης του σώματος, ο αντίχειρας θα δείξει την φορά της γωνιακής ταχύτητας.

Σε μια κυκλική κίνηση εκτός της γωνιακής ταχύτητας, υπάρχει και η **γραμμική ταχύτητα** $\vec{\upsilon}_{\gamma\rho.}$ η οποία ορίζεται ως το πηλίκο του διαγραφόμενου τόξου Δs σε χρόνο Δt, προς τον χρόνο αυτό. Δηλαδή κατά μέτρο :

$$\upsilon_{\gamma\rho.} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \to 0} \upsilon_{\gamma\rho.} = \frac{ds}{dt}.$$

Η διεύθυνση της γραμμικής ταχύτητας είναι πάντα εφαπτόμενη σε κάθε σημείο της κυκλικής τροχιάς, ενώ η φορά καθορίζεται από την φορά της κίνησης. Μονάδα μέτρησης της γραμμικής ταχύτητας είναι το 1 m/s.

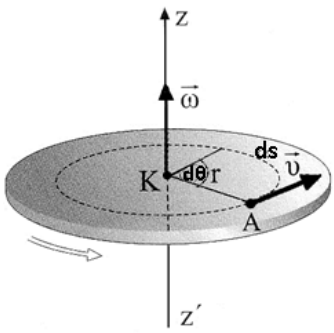
Τα χαρακτηριστικά της στροφικής κίνησης φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ			
Σώμα	**Είδος Κίνησης**	**Περιγραφή**	**Χαρακτηριστικά**
Υλικό σημείο ή στερεό σώμα.	Ομαλή (ω=σταθ.) ή ομαλά μεταβαλλόμενη (α_γ=σταθ.).	Ισχύουν όλοι οι νόμοι και οι εξισώσεις της στροφικής κίνησης.	Όλα τα σημεία του στερεού σώματος περιστρέφονται γύρω από τον άξονα περιστροφής (εκτός των σημείων που ανήκουν σ' αυτόν

Ποια σχέση συνδέει την γωνιακή και την γραμμική ταχύτητα ;

Η σχέση που συνδέει την επίκεντρη διαγραφόμενη γωνία και το αντίστοιχο τόξο είναι :

$$\Delta s = r \cdot \Delta\theta.$$



Άρα αν πάρουμε υπ' όψη μας την χρονική μεταβολή των παραπάνω μεγεθών, θα πάρουμε :

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = r \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Leftrightarrow \upsilon_{\gamma\rho.} = r \cdot \omega ,$$

ή υπό διανυσματική μορφή :

$$\vec{\upsilon}_{\gamma\rho.} = \vec{\omega} \cdot r .$$

όπου r είναι η απόσταση του σημείου από τον άξονα περιστροφής, δηλαδή η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς του εκάστοτε σημείου. Από την σχέση αυτή καταλαβαίνουμε γιατί τα σημεία του άξονα περιστροφής είναι συνεχώς ακίνητα.

Όταν ένα στερεό περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, όλα τα σημεία του στερεού έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα, γιατί διαγράφουν την ίδια γωνία στον ίδιο χρόνο, αλλά διαφορετική γραμμική ταχύτητα, γιατί δεν βρίσκονται στην ίδια απόσταση από τον άξονα περιστροφής.

Άρα ένα στερεό σώμα κάνει στροφική κίνηση όταν όλα τα σημεία του περιστρέφονται γύρω από έναν άξονα με κοινή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ και οι τροχιές των σημείων του σώματος είναι ομόκεντροι κύκλοι διαφόρων ακτινών, με τα κέντρα τους πάνω στον άξονα περιστροφής και τα επίπεδα τους κάθετα σ' αυτόν.

Γωνιακή επιτάχυνση.

Όταν η γωνιακή ταχύτητα ($\vec{\omega}$) ενός στερεού μεταβάλλεται, αυτό έχει τότε επιτάχυνση που την ονομάζουμε **γωνιακή επιτάχυνση $\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu.}$.**

Έστω ότι έχουμε έναν κυκλικό δίσκο που περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα zz'. Αν $\vec{\omega}_1$ και $\vec{\omega}_2$ είναι οι γωνιακές ταχύτητες του δίσκου τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2, η γωνιακή επιτάχυνση ορίζεται σαν ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας. Δηλαδή :

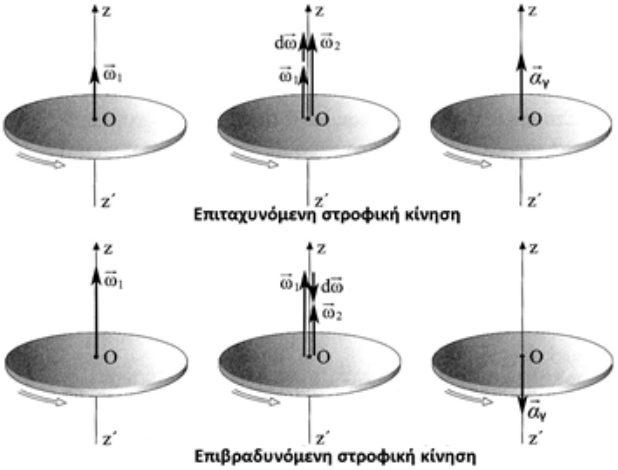
$$\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu.} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} ,$$

και σε αλγεβρική μορφή :

$$\alpha_{\gamma\omega\nu.} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} .$$

Η γωνιακή επιτάχυνση είναι διανυσματικό μέγεθος έχει την κατεύθυνση του διανύσματος $d\vec{\omega}$ και μονάδα το $1 rad/s^2$. Το σχήμα δείχνει την φορά της γωνιακής επιτάχυνσης για την επιταχυνόμενη και επιβραδυνόμενη στροφική κίνηση.

Άρα αν η γωνιακή ταχύτητα αυξάνεται, η $d\vec{\omega}$ έχει την φορά της $\vec{\omega}$, οπότε την ίδια φορά έχει και η $\vec{\alpha}_\gamma$, (επιταχυνόμενη στροφική κίνηση), ενώ αν η γωνιακή ταχύτητα μειώνεται, η $d\vec{\omega}$ έχει αντίθετη φορά από την φορά της $\vec{\omega}$, οπότε και η $\vec{\alpha}_\gamma$ έχει φορά αντίθετη από την φορά της $\vec{\omega}$ (επιβραδυνόμενη στροφική κίνηση).



Πόσες διαφορετικές επιταχύνσεις έχει ένα σώμα το οποίο εκτελεί στροφική κίνηση :

Ένα σώμα το οποίο εκτελεί στροφική κίνηση, έχει τις εξής επιταχύνσεις :

- $\vec{\alpha}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho.}$ **, κεντρομόλος επιτάχυνση,** η οποία προέρχεται από την μεταβολή της κατεύθυνσης του διανύσματος της γραμμικής ταχύτητας $\vec{\upsilon}_{\gamma\rho.}$. Οπότε καταλαβαίνουμε ότι η κεντρομόλος επιτάχυνση υπάρχει ΠΑΝΤΑ σε μια στροφική κίνηση. Θυμίζουμε ότι το μέτρο της κεντρομόλου επιταχύνσεως ισούται με :

$$\alpha_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho.} = \frac{\upsilon_{\gamma\rho.}^2}{r}.$$

Μονάδα μέτρησης : $1 m/s^2$.

- $\vec{\alpha}_{\gamma\rho.}$ **ή** $\vec{\alpha}_\varepsilon$ **, γραμμική επιτάχυνση ή επιτρόχιος επιτάχυνση,** η οποία προέρχεται από την μεταβολή του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας $\vec{\upsilon}_{\gamma\rho.}$, και το μέτρο της ισούται με :

$$\alpha_{\varepsilon.} = \frac{\Delta\upsilon_{\gamma\rho.}}{\Delta t}.$$

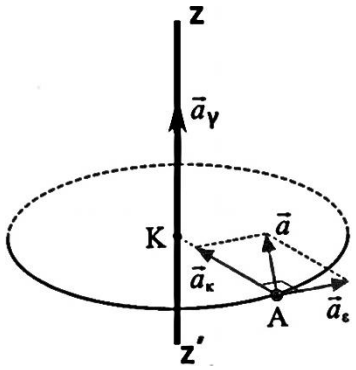
Μονάδα μέτρησης: $1 m/s^2$.

- Οπότε, κάθε σημείο που εκτελεί μία στροφική κίνηση στην οποία το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας μεταβάλλεται, θα περιγράφεται από μία συνισταμένη επιτάχυνση, για την οποία θα ισχύει :

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_\varepsilon + \vec{\alpha}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho.},$$

και θα έχει μέτρο που θα δίνεται από την σχέση :

$$\alpha = \sqrt{\alpha_\varepsilon^2 + \alpha_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho}^2}.$$

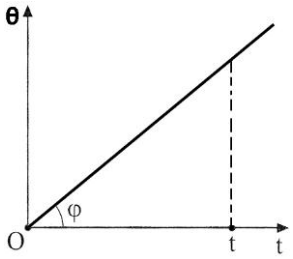


- $\vec{\alpha}_\gamma$ **,γωνιακή επιτάχυνση,** η οποία προέρχεται από την μεταβολή του μέτρου της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\omega}$, δηλαδή : $\vec{\alpha}_\gamma = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$ και το μέτρο της ισούται με :

$$\alpha_\gamma = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Μονάδα μέτρησης : $1 rad/s^2$.

Ποιες σχέσεις δίνουν την γωνιακή ταχύτητα και την γωνία στροφής, συναρτήσει με τον χρόνο στην στροφική κίνηση;



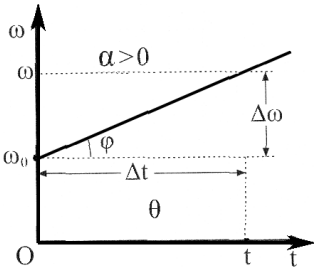
Ομαλή στροφική

Στην ομαλή στροφική κίνηση, όπου η γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ είναι σταθερή, ισχύει :

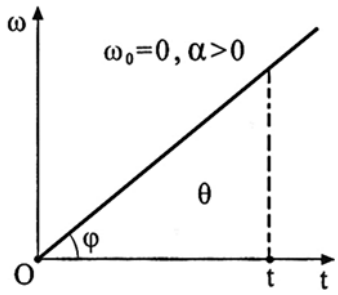
ω=σταθερή και θ=ωt.

Η γραφική παράσταση στην ομαλή στροφική κίνηση φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Από την κλίση της ευθείας παίρνουμε την σταθερή τιμή της γωνιακής ταχύτητας ω.

Ομαλά μεταβαλλόμενη στροφική



Στην στροφική κίνηση με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση, αν την χρονική στιγμή t_o=0 η γωνιακή ταχύτητα έχει μέτρο ω_o, τότε την χρονική στιγμή t θα έχει μέτρο ω το οποίο θα δίνεται από την σχέση :



$$\omega=\omega_o+\alpha_\gamma \cdot t,$$

η οποία προκύπτει από τον ορισμό της γωνιακής επιτάχυνσης :

$$\alpha_\gamma=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{\omega-\omega_o}{t-t_o}\overset{t_o=0}{\Leftrightarrow}\alpha_\gamma=\frac{\omega-\omega_o}{t}\Leftrightarrow\omega-\omega_o=\alpha_\gamma\cdot t\Leftrightarrow\omega=\omega_o+\alpha_\gamma\cdot t\,.$$

Στα παραπάνω διαγράμματα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις της χρονικής εξάρτηση της γωνιακής ταχύτητας για την ομαλά επιταχυνόμενη στροφική κίνηση με και χωρίς αρχική γωνιακή ταχύτητα ω_o, αντίστοιχα.

Η γωνία στροφής προκύπτει από την σχέση ορισμού της γωνιακής ταχύτητας $\omega=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$. Στην περίπτωση της επιταχυνόμενης στροφικής κίνησης με αρχική γωνιακή ταχύτητα (ω_o), αποδεικνύεται ότι είναι ίση με :

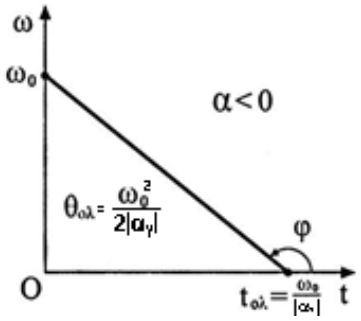
$$\theta=\omega_o\cdot t+\frac{1}{2}\cdot\alpha_\gamma\cdot t^2\,.$$

Συγκεκριμένα από το εμβαδόν της γραφικής παράστασης ω-t στην ομαλά στροφική επιταχυνόμενη με αρχική γωνιακή ταχύτητα, παίρνουμε :

$$E=\theta=\frac{B+\beta}{2}\cdot\upsilon=\frac{\omega+\omega_o}{2}t=\frac{\omega_o+\alpha_\gamma\cdot t+\omega_o}{2}t=\frac{2\omega_o+\alpha_\gamma\cdot t}{2}t=\frac{2\omega_o\cdot t+\alpha_\gamma\cdot t^2}{2}\Leftrightarrow\theta=\omega_o\cdot t+\frac{1}{2}\cdot\alpha_\gamma\cdot t^2\,.$$

Ανάλογα αν αντί για επιταχυνόμενη στροφική κίνηση, έχουμε επιβραδυνόμενη, θα προέκυπτε από τον παραπάνω ορισμό :

$$\omega=\omega_o-|\alpha_\gamma|\cdot t\,.$$



Στην ομαλά στροφικά επιβραδυνόμενη στην περίπτωση όπου το σώμα θα πάψει να περιστρέφεται, αποδεικνύεται ότι ο συνολικός χρόνος περιστροφής μέχρι την ακινητοποίηση του σώματος είναι :

$$\omega=\omega_o-|\alpha_\gamma|\cdot t\overset{\omega=0}{\Leftrightarrow}0=\omega_o-|\alpha_\gamma|\cdot t_{ολ.}\Leftrightarrow\omega_o=|\alpha_\gamma|\cdot t_{ολ.}\Leftrightarrow t_{ολ.}=\frac{\omega_o}{|\alpha_\gamma|}\,,$$

ενώ η συνολική διαγραφόμενη γωνία μέχρι να σταματήσει το σώμα :

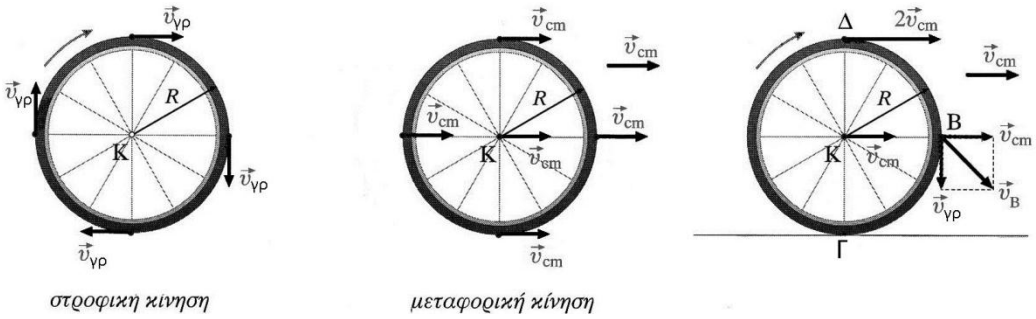
$$\left.\begin{array}{l}\theta=\omega_o\cdot t-\frac{1}{2}\cdot|\alpha_\gamma|\cdot t^2\\ t_{ολ.}=\frac{\omega_o}{|\alpha_\gamma|}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\theta_{ολ.}=\omega_o\cdot\frac{\omega_o}{|\alpha_\gamma|}-\frac{1}{2}\cdot|\alpha_\gamma|\cdot\left(\frac{\omega_o}{|\alpha_\gamma|}\right)^2=\frac{\omega_o^2}{|\alpha_\gamma|}-\frac{1}{2}\cdot|\alpha_\gamma|\cdot\frac{\omega_o^2}{|\alpha_\gamma|^2}=\frac{\omega_o^2}{|\alpha_\gamma|}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\omega_o^2}{|\alpha_\gamma|}\Leftrightarrow\theta_{ολ.}=\frac{\omega_o^2}{2|\alpha_\gamma|}.$$

το οποίο μπορεί να βγει και από το εμβαδόν της τελευταίας γραφικής παράστασης.

Χαρακτηριστικά της σύνθετης κίνησης.

Όταν ένα σώμα εκτελεί **ταυτόχρονα και μεταφορική και περιστροφική κίνηση,** λέμε ότι κάνει μια **σύνθετη** κίνηση. Την σύνθετη κίνηση την μελετούμε σαν την επαλληλία της μεταφορικής και της στροφικής κίνησης. Το πιο συνηθισμένο σώμα που εκτελεί μια σύνθετη κίνηση είναι ο τροχός του αυτοκινήτου.

Ο τροχός του αυτοκινήτου εκτελεί ταυτόχρονα μια ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{cm}$, αυτή του αυτοκινήτου και μια ομαλή στροφική γύρω από τον άξονά του με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{\gamma\rho}$. Η ταχύτητα της ευθύγραμμης κίνησης βρίσκεται στο επίπεδο της στροφικής.

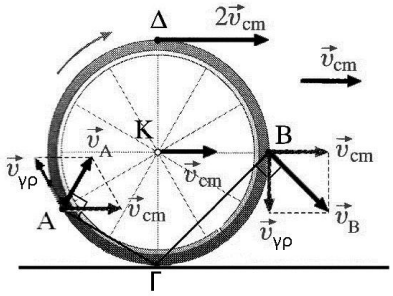


Η ταχύτητα κάθε σημείου του τροχού βρίσκεται με σύνθεση της ταχύτητας λόγω της μεταφορικής κίνησης και της ταχύτητας λόγω της στροφικής κίνησης. Το σημείο Κ του άξονα έχει την ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{cm}$, του αυτοκινήτου (λόγω στροφικής κίνησης το Κ δεν έχει ταχύτητα).

Αν δεχθούμε ότι ο τροχός **δεν ολισθαίνει** (δεν γλιστρά) πάνω στο έδαφος, το σημείο του Γ έχει συνισταμένη ταχύτητα μηδέν, ($\vec{\upsilon}_\Gamma=0$), οπότε $\upsilon_\Gamma=0\Leftrightarrow\upsilon_{\gamma\rho}-\upsilon_{cm}=0\Leftrightarrow\upsilon_{\gamma\rho}=\upsilon_{cm}$. Για τον λόγο αυτό ο άξονας ο οποίος είναι κάθετος στο επίπεδο του τροχού και διέρχεται από το σημείο Γ, ονομάζεται **στιγμιαίος άξονας περιστροφής**.

<u>Δηλαδή η γραμμική ταχύτητα λόγω περιστροφής, των σημείων της περιφέρειας του τροχού, είναι ίση κατά μέτρο, με την μεταφορική ταχύτητα του αυτοκινήτου ($\upsilon_{\gamma\rho}=\upsilon_{cm}$), όταν το σώμα εκτελεί **κύλιση και όχι ολίσθηση**.</u>

Οπότε,



- στο ανώτερο σημείο Δ του τροχού η ταχύτητα έχει μέτρο :

  $\upsilon_\Delta=\upsilon_{\gamma\rho}+\upsilon_{cm}=2\upsilon_{\gamma\rho}=2\upsilon_{cm}$.

- στο κατώτερο σημείο Γ του τροχού η ταχύτητα έχει μέτρο :

  $\upsilon_\Gamma=\upsilon_{\gamma\rho}-\upsilon_{cm}\Leftrightarrow\upsilon_\Gamma=0$.

- στα σημεία μιας οριζόντιας διαμέτρου, π.χ. το σημείο Β :

  $\upsilon_B=\sqrt{\upsilon_{cm}^2+\upsilon_{\gamma\rho}^2}=\sqrt{2\upsilon_{\gamma\rho}^2}=\upsilon_{\gamma\rho}\sqrt{2}$.

- Σ' ένα τυχαίο σημείο Α :

  $\upsilon_A=\sqrt{\upsilon_{cm}^2+\upsilon_{\gamma\rho}^2+2\upsilon_{\gamma\rho}\upsilon_{cm}\sigma\upsilon\nu\theta}=\sqrt{2\upsilon_{\gamma\rho}^2+2\upsilon_{\gamma\rho}^2\sigma\upsilon\nu\theta}=\sqrt{2\upsilon_{\gamma\rho}^2(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}\Leftrightarrow\upsilon_A=\upsilon_{\gamma\rho}\sqrt{2(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}$.

Από το παραπάνω σχήμα παρατηρούμε ότι σε κάθε σημείο του τροχού το διάνυσμα της συνισταμένης ταχύτητας είναι πάντα κάθετο στην χορδή η οποία ενώνει το σημείο αυτό με τον στιγμιαίο άξονα περιστροφής.

Ποιες σχέσεις συνδέουν τα μεγέθη της μεταφορικής κίνησης και τα μεγέθη της στροφικής κίνησης ;

Έστω ότι ο τροχός του παραπάνω σχήματος ακτίνας R, εκτελεί μια πλήρη περιστροφή. Τότε το σημείο Γ που ήταν σε επαφή με τον δρόμο θα ξαναβρεθεί σε επαφή με τον δρόμο μετά από μία περίοδο. Το διάστημα που θα έχει διαγράψει τότε ο τροχός θα είναι s=2πR **(1)**. Επίσης, η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία που θα έχει διαγράψει η ακτίνα του R θα είναι ίση με θ=2π **(2)**. Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι s=θR. Παίρνοντας την χρονική μεταβολή της τελευταίας σχέσης, παίρνουμε :

$$s = \theta \cdot R \Leftrightarrow \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \cdot R \Leftrightarrow \upsilon_{\gamma\rho} = \omega \cdot R .$$

Στην κύλιση και όχι ολίσθηση όμως ισχύει $\upsilon_{\gamma\rho} = \upsilon_{cm}$. Οπότε καταλήγουμε στην :

$$\upsilon_{cm} = \omega \cdot R . \qquad \textbf{(3)}$$

Άρα η ταχύτητα της μεταφορικής κίνησης είναι ίση με την γραμμική ταχύτητα των σημείων του τροχού. Η παραπάνω σχέση συνδέει την ταχύτητα της μεταφορικής κίνησης ($\vec{\upsilon}_{cm}$) με την γωνιακή ταχύτητα που είναι η χαρακτηριστική ταχύτητα της στροφικής κίνησης ($\vec{\omega}$). Άρα συνδέει μεταφορικά και στροφικά μεγέθη.

Έστω τώρα ότι έχουμε έναν τροχό ο οποίος επιταχύνεται. Το κέντρο μάζας του τροχού εκτελεί μια ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Σύμφωνα με την τελευταία σχέση, έχουμε :

$$\frac{\Delta \upsilon_{cm}}{\Delta t} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \cdot R \qquad \textbf{(4)}$$

Όμως γνωρίζουμε ότι : $\frac{\Delta \upsilon_{cm}}{\Delta t} = \alpha_{cm}$ **(5)** και $\frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \alpha_{\gamma}$ **(6)**.

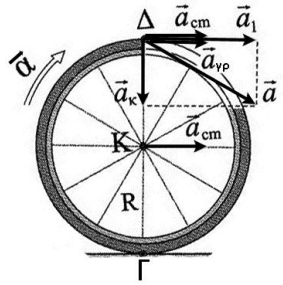
Από τις (4), (5) και (6), προκύπτει :

$$\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma} \cdot R . \qquad \textbf{(7)}$$

Από την τελευταία σχέση βλέπουμε ότι η «μεταφορική» επιτάχυνση συνδέεται με την γωνιακή. Και αυτή η σχέση συνδέει μεταφορικά και στροφικά μεγέθη.

Επομένως ένα σώμα που εκτελεί σύνθετη μεταβαλλόμενη κίνηση **κύλιση και όχι ολίσθηση**, θα εμφανίζει και την μεταφορική επιτάχυνση ($\vec{\alpha}_{cm}$) και όλες τις επιταχύνσεις της στροφικής κίνησης ($\vec{\alpha}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho.}, \vec{\alpha}_{\varepsilon}$). Οπότε ένα τυχαίο σημείο θα έχει συνισταμένη επιτάχυνση :

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_{cm} + \vec{\alpha}_{\gamma\rho} + \vec{\alpha}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho.}$$



και σε κάθετο επίπεδο θα εμφανιστεί και η $\vec{\alpha}_{\gamma}$.

Και κατά μέτρο :

$$\alpha_{ολ.} = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho}^2} \Leftrightarrow \alpha_{ολ.} = \sqrt{\left(\alpha_{cm} + \alpha_{\gamma\rho}\right)^2 + \alpha_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho}^2} .$$

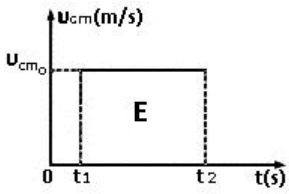
Ο παρακάτω πίνακας είναι συγκριτικός μεταξύ των δύο διαφορετικών κινήσεων καθώς και της σύνθετης κίνησης που μπορεί να εκτελέσει ένα στερεό.

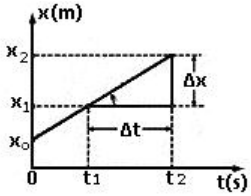
ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ.	ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ.
Είναι η κίνηση στην οποία όλα τα σημεία του στερεού έχουν την ίδια ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{cm_1}$ κάποια χρονική στιγμή t_1. Κάποια άλλη χρονική στιγμή t_2, τα σημεία του στερεού έχουν και πάλι την ίδια ταχύτητα ($\vec{\upsilon}_{cm_2}$), η οποία ανάλογα της κίνησης, μπορεί να είναι η ίδια ή διαφορετική της $\vec{\upsilon}_{cm_1}$.	Είναι η κίνηση κατά την οποία ένα στερεό περιστρέφεται ως προς έναν άξονα περιστροφής, δηλαδή η κίνηση στην οποία αλλάζει συνεχώς ο προσανατολισμός του σώματος.
Ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{cm} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$.	• Γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$. • Γραμμική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{\gamma\rho} = \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t}$.
Επιτάχυνση $\vec{\alpha}_{cm} = \frac{\Delta\vec{\upsilon}_{cm}}{\Delta t}$.	• Γωνιακή επιτάχυνση $\vec{\alpha}_{\gamma} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$. Όποτε μεταβάλλεται το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\omega}$. • Κεντρομόλος επιτάχυνση $\alpha_{\kappa} = \frac{\upsilon_{\gamma\rho}^2}{R}$. Όποτε μεταβάλλεται η κατεύθυνση του διανύσματος της γραμμικής ταχύτητας $\vec{\upsilon}_{\gamma\rho}$. Άρα υπάρχει ΠΑΝΤΑ. • Επιτρόχιος (ή γραμμική) επιτάχυνση $\vec{\alpha}_{\gamma\rho} = \frac{\Delta\vec{\upsilon}_{\gamma\rho}}{\Delta t}$. Όποτε μεταβάλλεται το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας $\vec{\upsilon}_{\gamma\rho}$.
Μετατόπιση $\Delta\vec{x}$.	Γωνία στροφής θ.

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΚΙΝΗΣΗ

ΟΜΑΛΗ (Ε.Ο.Κ.)

- Αν υ_{cm}=σταθ. $\Leftrightarrow$ $x=\upsilon_{cm}\cdot t$.

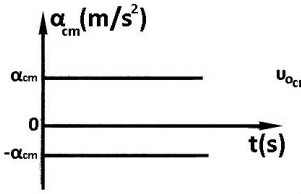


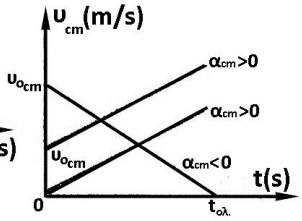


- Το διάγραμμα x-t θα ξεκινάει από μια θέση x_o, αν για t=0 έχουμε $x=x_o$.
- Από την κλίση του διαγράμματος x-t, υπολογίζουμε την υ_{cm}.
- Από το εμβαδόν του διαγράμματος υ-t παίρνουμε την μετατόπιση $\Delta\vec{x}$.

ΟΜΑΛΑ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΗ

- Αν α_{cm}=σταθ. $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \upsilon_{cm} = \upsilon_{o_{cm}} \pm |\alpha_{cm}|\cdot t \\ x = \upsilon_{o_{cm}}\cdot t \pm \frac{1}{2}\cdot|\alpha_{cm}|\cdot t^2 \end{cases}$.



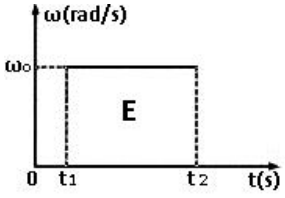


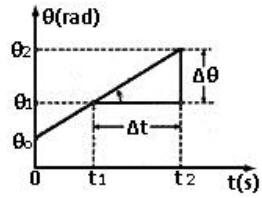
- Από την κλίση του διαγράμματος υ_{cm}-t παίρνουμε την α_{cm}.
- Από το εμβαδόν του διαγράμματος υ_{cm}-t παίρνουμε την μετατόπιση $\Delta\vec{x}$.

ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

ΟΜΑΛΗ ΣΤΡΟΦΙΚΗ

- Αν ω=σταθ. $\Leftrightarrow$ $\theta=\omega\cdot t$.

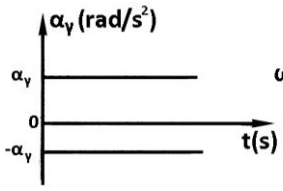


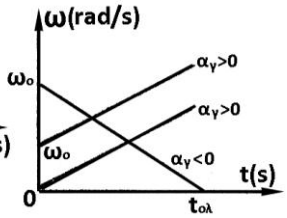


- Το διάγραμμα θ-t θα ξεκινάει από μια θέση θ_o, αν για t=0 έχουμε $\theta=\theta_o$.
- Από την κλίση του διαγράμματος θ-t, υπολογίζουμε την ω.
- Από το εμβαδόν του διαγράμματος ω-t παίρνουμε την γωνιακή μετατόπιση Δθ.

ΟΜΑΛΑ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΗ

- Αν α_γ=σταθ. $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \omega = \omega_o \pm |\alpha_\gamma|\cdot t \\ \theta = \omega_o\cdot t \pm \frac{1}{2}\cdot|\alpha_\gamma|\cdot t^2 \end{cases}$.





- Από την κλίση του διαγράμματος ω-t παίρνουμε την α_γ.
- Από το εμβαδόν του διαγράμματος ω-t παίρνουμε την γωνιακή μετατόπιση Δθ.

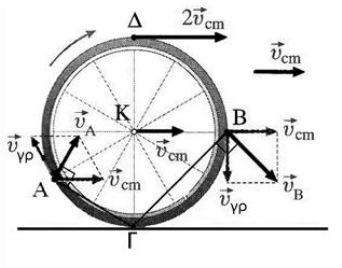
ΚΥΛΙΣΗ ΚΑΙ ΟΧΙ ΟΛΙΣΘΗΣΗ
Σύνθετη (=μεταφορική + στροφική)

$\upsilon_{cm}=\upsilon_{\gamma\rho}=\omega\cdot R$

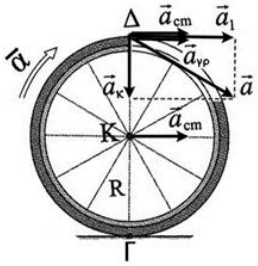
$\Delta s=R\cdot\Delta\theta$

$\alpha_{\gamma\rho}=\alpha_{cm}=\alpha_\gamma\cdot R$

Κάθε σημείο του στερεού έχει ταχύτητα η οποία ισούται με το διανυσματικό άθροισμα των $\vec{\upsilon}_{cm}$ και $\vec{\upsilon}_{\gamma\rho}$.



Κάθε σημείο του στερεού έχει επιτάχυνση η οποία ισούται με το διανυσματικό άθροισμα των $\vec{\alpha}_{cm}$, $\vec{\alpha}_{\gamma\rho}$ και $\vec{\alpha}_{\kappa\epsilon\nu\tau\rho.}$.



Ροπή δύναμης.

Πολλές φορές όταν ασκούμε σ' ένα σώμα μια δύναμη αυτό περιστρέφεται, π.χ. μια βίδα. Τι είναι όμως αυτό που προσδίδει σ' ένα σώμα την ικανότητα να περιστραφεί δηλαδή την γωνιακή επιτάχυνση ; Η αιτία για να περιστραφεί ένα σώμα όταν ασκείται σ' αυτό μια δύναμη, είναι ένα φυσικό μέγεθος που ονομάζεται **ροπή δύναμης** και περιγράφει το στροφικό αποτέλεσμα που έχει η δύναμη.

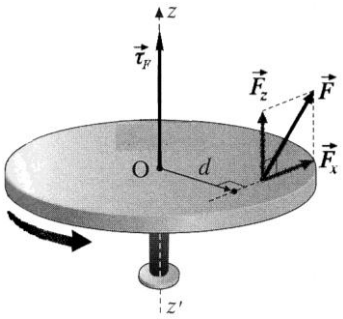
Ροπή μιας δύναμης $\vec{\tau}_F$ ως προς τον άξονα περιστροφής, ονομάζουμε το διανυσματικό μέγεθος το οποίο έχει :

- μέτρο το γινόμενο του μέτρου της δύναμης $\vec{F}$ επί τον μοχλοβραχίονα, δηλαδή την κάθετη απόσταση ℓ του φορέα της δύναμης από τον άξονα περιστροφής (ά.π.), δηλαδή :

$$\tau = F \cdot \ell \, .$$

- διεύθυνση πάνω στον άξονα περιστροφής και
- φορά που βρίσκεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού (τη φορά του αντίχειρα όταν τα υπόλοιπα δάχτυλα δείχνουν τη φορά περιστροφής του σώματος αν στο σώμα ασκείται μόνο η $\vec{F}$).

Μονάδα μέτρησης της ροπής δύναμης είναι το 1Nm.



Αν η δύναμη $\vec{F}$ δε βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής, τότε την αναλύουμε σε δύο συνιστώσες : την $\vec{F}_x$ σε επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής και την $\vec{F}_z$ παράλληλη στον άξονα περιστροφής. Σ' αυτήν την περίπτωση η ροπή της $\vec{F}$ είναι ίση με τη ροπή της $\vec{F}_x$, διότι η ροπή της $\vec{F}_z$ είναι μηδέν (η $\vec{F}_z$ δεν μπορεί να στρέψει το σώμα γύρω από τον zz' γιατί είναι σε άξονα παράλληλο στον ά.π.).

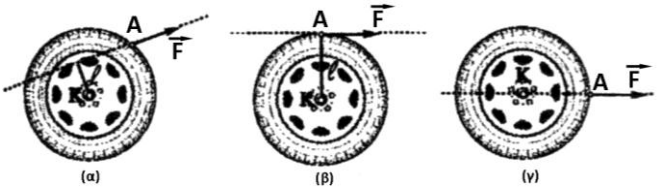
Κατά σύμβαση θεωρούμε **θετική** τη ροπή της δύναμης εκείνης που, όταν ασκείται μόνη της στο σώμα, τείνει να το περιστρέψει **αντίθετα από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού**, και **αρνητική** τη ροπή της δύναμης που, όταν ασκείται μόνη της στο σώμα, τείνει να το περιστρέψει κατά τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

Όταν σ' ένα σώμα ασκούνται δύο ή περισσότερες δυνάμεις, η αλγεβρική τιμή της συνολικής ροπής είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων αυτών, δηλαδή ισχύει η σχέση :

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_\nu \, ,$$

όπου τα . $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\nu$., εκφράζουν τις **αλγεβρικές τιμές** των επιμέρους ροπών. Αν η συνολική ροπή βγει θετική σημαίνει ότι το στερεό υπό την επίδραση των δυνάμεων περιστρέφεται αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού, αλλιώς ομόρροπα με τους δείκτες του ρολογιού.

Ροπή δύναμης ως προς σημείο.



Όταν σ' ένα σώμα που ηρεμεί πάνω σ' ένα επίπεδο ασκηθεί δύναμη της οποίας ο φορέας διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος, τότε το σώμα θα κάνει μόνο μεταφορική κίνηση (σχήμα γ). Αν όμως ο φορέας της δύναμης δεν περνά από το κέντρο μάζας, τότε το σώμα θα κάνει εκτός της μεταφορικής και στροφική κίνηση (σχήματα α και β).

Στις περιπτώσεις όπου δεν μας ενδιαφέρει ο άξονας περιστροφής σ' ένα σώμα, χρησιμοποιούμε το μέγεθος ροπή δύναμης ως προς σημείο. Άρα :

Ροπή μιας δύναμης $\vec{\tau}_F$ ως προς ένα σημείο Ο, ονομάζουμε το διανυσματικό μέγεθος το οποίο έχει :

- μέτρο το γινόμενο του μέτρου της δύναμης $\vec{F}$ επί τον μοχλοβραχίονα, δηλαδή την κάθετη απόσταση ℓ του φορέα της δύναμης από το σημείο περιστροφής, δηλαδή :

$$\tau = F \cdot \ell .$$

- διεύθυνση που περνά από το σημείο περιστροφής Ο και είναι κάθετη στο επίπεδο το οποίο ορίζεται από το σημείο Ο και τη διεύθυνση της δύναμης $\vec{F}$, και
- φορά που δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού, όπως και πριν.

<u>Πρέπει να επισημάνουμε ότι αν η δύναμη διέρχεται από το σημείο Ο. τότε ℓ=0 και η ροπή της είναι ίση με μηδέν (τ_F=0).</u>

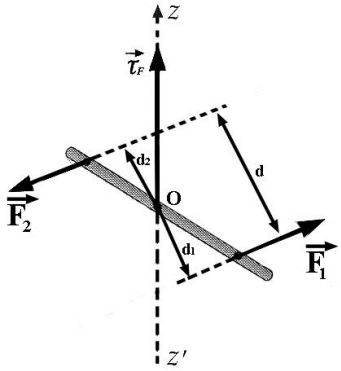
Μια ειδική περίπτωση ροπής δύναμης ως προς σημείο, είναι η περίπτωση όπου στο σώμα ασκούνται **δύο ίσες και αντίθετης κατεύθυνσης δυνάμεις που το στρέφουν κατά την ίδια φορά.** Δύο τέτοιες δυνάμεις λέμε ότι αποτελούν **ζεύγος δυνάμεων.**

Η ροπή του ζεύγους δυνάμεων ορίζεται ως το διανυσματικό μέγεθος που έχει διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο των δυνάμεων, φορά που βρίσκεται και πάλι με τον κανόνα του δεξιού χεριού και μέτρο :

$$\tau_F = F \cdot d,$$

όπου F είναι το μέτρο των δυνάμεων και d η απόσταση των φορέων τους. Πράγματι, η συνολική ροπή των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, του σχήματος, που αποτελούν ζεύγος δυνάμεων, ως προς ένα τυχαίο σημείο Ο του επιπέδου τους, έχει αλγεβρική τιμή :

$$\tau_F = \tau_1 + \tau_2 = F_1 \cdot d_1 + F_2 \cdot d_2 = F_1 \cdot (d_1 + d_2) \Leftrightarrow \tau_F = F_1 \cdot d.$$



Η ροπή ενός ζεύγους δυνάμεων είναι η ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου τους, είτε αυτό βρίσκεται μεταξύ των δυνάμεων είτε εξωτερικά από αυτές.

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ :</u> καθαρή στροφική κίνηση ενός σώματος, προκαλεί μόνο ένα ζεύγος δυνάμεων, και όχι μια μεμονωμένη δύναμη.

Ισορροπία στερεού.

Αν η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα είναι μηδέν ($\Sigma\vec{F}$=0), το σώμα δεν θα εκτελέσει μεταφορική κίνηση (εφόσον αρχικά είναι ακίνητο). Αυτό όμως δεν το εμποδίζει να κάνει στροφική κίνηση. Αυτό συμβαίνει στην περίπτωση όπου υπάρχουν ροπές. Αφού είναι $\Sigma\vec{F}$=0, οι ροπές αυτές θα οφείλονται σε ζεύγη δυνάμεων.

Επειδή η ροπή ζεύγους δυνάμεων είναι ίδια ως προς όλα τα σημεία, για να ισορροπεί ένα αρχικά ακίνητο στερεό σώμα, πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις $\Sigma\vec{F}$=0 και $\Sigma\vec{\tau}$=0 ως προς **οποιοδήποτε σημείο**. Άρα :

Για να ισορροπεί ένα αρχικά ακίνητο στερεό σώμα στο οποίο ασκούνται πολλές ομοεπίπεδες δυνάμεις, θα πρέπει :

α) η συνισταμένη δύναμη να είναι μηδέν, δηλαδή :

$$\Sigma\vec{F} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Sigma\vec{F}_x = 0 \\ \Sigma\vec{F}_y = 0 \end{cases} \text{ και}$$

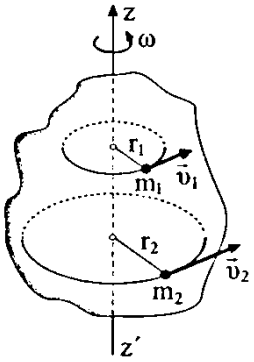
β) το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου τους (συνήθως όμως ως σημείο αναφοράς των ροπών θα παίρνουμε ή **i)** το σημείο συμμετρίας για να είναι εύκολος ο τρόπος υπολογισμού του μοχλοβραχίονα, ή **ii)** ένα σημείο στο οποίο ασκούνται κάποιες άγνωστες δυνάμεις έτσι ώστε αυτές οι δυνάμεις να μην έχουν μοχλοβραχίονα και να απλοποιούνται έτσι οι υπολογισμοί μας), δηλαδή :

$$\Sigma\vec{\tau} = 0 .$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις. Έστω ένα αρχικά ακίνητο σώμα. Όταν :

- $\Sigma F = 0$ και $\Sigma \tau \neq 0$, το σώμα κάνει στροφική κίνηση.
- $\Sigma F \neq 0$ και $\Sigma \tau = 0$, το σώμα κάνει μεταφορική κίνηση.
- $\Sigma F \neq 0$ και $\Sigma \tau \neq 0$, το σώμα κάνει και μεταφορική και στροφική κίνηση.
- $\Sigma F = 0$ και $\Sigma \tau = 0$, το σώμα ισορροπεί.

Ροπή αδράνειας.



Έστω ότι έχουμε ένα στερεό σώμα το οποίο στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα zz'.

Διαχωρίζουμε το σώμα σε στοιχειώδη τμήματα με μάζες m_1, m_2,..., m_n τόσο μικρά, ώστε το καθένα από αυτά να μπορεί να θεωρηθεί ως ένα υλικό σημείο. Οι στοιχειώδεις μάζες m_1, m_2,..., m_n εκτελούν κυκλικές κινήσεις γύρω από τον άξονα zz΄ με ακτίνες r_1, r_2,..., r_n αντίστοιχα.

Ορίζουμε ως ροπή αδράνειας (I) ενός στερεού σώματος ως προς κάποιον άξονα περιστροφής το μονόμετρο μέγεθος που είναι ίσο με :

$$I = m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + m_3 \cdot r_3^2 + ...m_n \cdot r_n^2 .$$

Η ροπή αδράνειας έχει μονάδα το 1 $kg \cdot m^2$.

Η ροπή αδράνειας I ενός στερεού σώματος ως προς έναν ορισμένο άξονα, εξαρτάται όχι μόνο από τη μάζα του σώματος, αλλά και από τον τρόπο κατανομής της μάζας του γύρω από τον θεωρούμενο άξονα. Άρα **πάντα πρέπει να ορίζουμε ως προς ποιον άξονα θέλουμε να υπολογίσουμε την ροπή αδράνειας.** Με τον ορισμό της, υπολογίζουμε την ροπή αδράνειας ως προς άξονα περιστροφής που περνά από τον άξονα του κέντρου μάζας (cm) του σώματος.

Η ροπή αδράνειας ενός σώματος ως προς κάποιον άξονα εκφράζει την αδράνεια του σώματος στη στροφική του κίνηση γύρω από τον ά.π. Παίζει δηλαδή τον ρόλο της μάζας στην μεταφορική κίνηση. Η μόνη τους σημασιολογική διαφορά είναι ότι η μάζα παραμένει σταθερή (για την κλασική φυσική) ενώ η ροπή αδράνειας εξαρτάται πάντα από τον ά.π. άρα από την κατανομή της μάζας. **Άρα ένα στερεό έχει μία μόνο μάζα άλλα άπειρες ροπές αδράνειας.**

Όταν όμως θέλουμε να υπολογίσουμε την ροπή αδράνειας ως προς έναν άξονα που δεν περνάει από το cm του σώματος, δεν μπορούμε να υπολογίσουμε την ροπή αδράνειας με την βοήθεια του ορισμού. Σε τέτοιες περιπτώσεις κάνουμε χρήση ενός θεωρήματος, που είναι γνωστό ως **θεώρημα των παράλληλων αξόνων ή θεώρημα του Steiner,** το οποίο αναφέρει ότι η ροπή αδράνειας ως προς ά.π. διαφορετικό από τον άξονα που περνάει από το cm του σώματος, είναι ίση με την ροπή αδράνειας του σώματος ως προς τον άξονα του cm αυξανόμενη κατά το γινόμενο της μάζας του στερεού επί το τετράγωνο της απόστασης του άξονα περιστροφής από τον άξονα του cm. Δηλαδή :

$$I_{(K)} = I_{cm} + M \cdot d^2 .$$

όπου d είναι η απόσταση των δύο αξόνων (περιστροφής και άξονα που διέρχεται από το cm), $I_{(K)}$ είναι η ροπή αδράνειας ως προς τον τυχαίο ά.π. και I_{cm} είναι η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα που διέρχεται από το cm του σώματος.

Άρα καταλαβαίνουμε ότι η ροπή αδράνειας ενός σώματος ως προς τον άξονα που διέρχεται από το cm είναι η μικρότερη δυνατή, μιας και d=0.

Θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης.

Γνωρίζουμε από την κλασική μηχανική, ότι όταν σ' ένα σώμα ασκούνται δυνάμεις τότε στο σώμα αναπτύσσεται μια επιτάχυνση, η οποία δίνεται από την σχέση του δεύτερου νόμου του Newton, δηλαδή :

$$\Sigma\vec{F} = m \cdot \vec{\alpha}_{cm} .$$

Στην περίπτωση της στροφικής κίνησης ισχύει μια ανάλογη σχέση, γνωστή ως **θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης**, η οποία δίνεται από την σχέση :

$$\Sigma\vec{\tau} = I \cdot \vec{\alpha}_{\gamma} .$$

Άρα το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που δρουν πάνω σ' ένα στερεό σώμα το οποίο περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, ισούται με το γινόμενο της ροπής αδράνειας, **ως προς τον ίδιο άξονα** επί την αλγεβρική τιμή της γωνιακής επιτάχυνσης που αποκτά.

Από τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης, παίρνουμε : $\vec{\alpha}_{\gamma} = \frac{\Sigma\vec{\tau}}{I}$, άρα όσο μεγαλύτερη είναι η ροπή αδράνειας, τόσο μικρότερη είναι η γωνιακή επιτάχυνση, πράγμα που επιβεβαιώνει ότι **η ροπή αδράνειας εκφράζει την αδράνεια στην στροφική κίνηση**. Επίσης επειδή η ροπή αδράνειας εξαρτάται από τον ά.π. και η γωνιακή επιτάχυνση θα εξαρτάται από τον άξονα περιστροφής.

Ο θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης ισχύει για τις ροπές των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα, μιας και οι ροπές των εσωτερικών δυνάμεων είναι μηδέν (αφού εμφανίζονται πάντα κατά ζεύγη).

Συμπερασματικά για όλες τις περιπτώσεις σύνθετης κίνησης έχουμε τον παρακάτω πίνακα.

Αν $\Sigma F=0 \Leftrightarrow \alpha_{cm}=0$ **ΚΑΙ** $\Sigma\tau=0 \Leftrightarrow \alpha_{\gamma}=0$, το σώμα μπορεί να :	Ηρεμεί ($\vec{\upsilon}_{o_{cm}}=0$, $\vec{\omega}_o=0$).
	Εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση ($\vec{\upsilon}_{o_{cm}}$ =σταθ, $\vec{\omega}_o=0$).
	Εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση ($\vec{\upsilon}_{o_{cm}}=0$, $\vec{\omega}_o$ =σταθ.).
	Εκτελεί ομαλή σύνθετη κίνηση ($\vec{\upsilon}_{o_{cm}}$ =σταθ, $\vec{\omega}_o$ =σταθ.).
Αν $\Sigma F \neq 0 \Leftrightarrow \alpha_{cm} \neq 0$ **ΚΑΙ** $\Sigma\tau=0 \Leftrightarrow \alpha_{\gamma}=0$, το σώμα μπορεί να :	Αν $\vec{\omega}_o=0$, το σώμα θα εκτελέσει μεταβαλλόμενη μεταφορική κίνηση με $\vec{\upsilon}_{cm} \neq 0$.
	Αν $\vec{\omega}_o \neq 0$, το σώμα θα εκτελέσει μεταβαλλόμενη μεταφορική κίνηση με $\vec{\upsilon}_{cm} \neq 0$ και ομαλή στροφική με $\vec{\omega}_o$ =σταθ.
Αν $\Sigma F=0 \Leftrightarrow \alpha_{cm}=0$ **ΚΑΙ** $\Sigma\tau \neq 0 \Leftrightarrow \alpha_{\gamma} \neq 0$, το σώμα μπορεί να :	Αν $\vec{\upsilon}_{o_{cm}}=0$, το σώμα θα εκτελέσει μεταβαλλόμενη στροφική κίνηση με $\vec{\omega} \neq 0$.
	Αν $\vec{\upsilon}_{o_{cm}} \neq 0$, το σώμα θα εκτελέσει ομαλή μεταφορική κίνηση με $\vec{\upsilon}_{o_{cm}}$ =σταθ. και μεταβαλλόμενη στροφική με $\vec{\omega} \neq$ σταθ.
Αν $\Sigma F \neq 0 \Leftrightarrow \alpha_{cm} \neq 0$ **ΚΑΙ** $\Sigma\tau \neq 0 \Leftrightarrow \alpha_{\gamma} \neq 0$, το σώμα μπορεί να :	Το σώμα θα εκτελέσει μεταβαλλόμενη σύνθετη κίνηση.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ : ο θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης, ισχύει διανυσματικά μόνο όταν : **α)** η ροπή αδράνειας του σώματος ως προς τον ά.π. του, είναι σταθερή και **β)** ο άξονας περιστροφής του σώματος **i)** είναι σταθερός ως προς την θέση και την διεύθυνσή του ή **ii)** διέρχεται από το cm και έχει σταθερή διεύθυνση.

Στροφορμή και διατήρηση της.

Υλικό σημείο.

Έστω ένα σώμα μικρών διαστάσεων, οπότε μπορούμε να το θεωρήσουμε ως υλικό σημείο, το οποίο εκτελεί κυκλική κίνηση γύρω από έναν ά.π. Το σημείο απέχει από τον ά.π. απόσταση r.

Ορίζουμε **στροφορμή** ενός υλικού σημείου ως προς έναν άξονα zz' που διέρχεται από το κέντρο της κυκλικής τροχιάς και είναι κάθετος στο επίπεδό της, το διανυσματικό μέγεθος το οποίο έχει μέτρο,

$$L=p\cdot r,$$

όπου p είναι η ορμή του υλικού σημείου ($\vec{p}=m\cdot\vec{\upsilon}$). Δηλαδή η στροφορμή είναι το ανάλογο της ορμής στην στροφική κίνηση. Άρα :

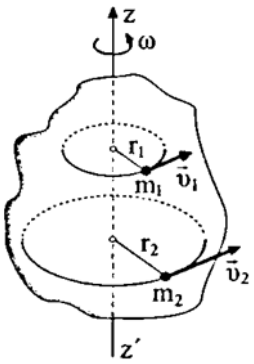
$$L=m\cdot\upsilon\cdot r.$$

Η διεύθυνση της στροφορμής είναι η ίδια μ' αυτή του άξονα zz' και φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού. Αν τα δάκτυλα δείχνουν την φορά της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$, τότε ο αντίχειρας δείχνει την φορά της στροφορμής.

Μονάδα μέτρησης της στροφορμής είναι το 1 $kg\cdot m^2/s$.

Στερεό σώμα.

Επεκτείνουμε την περίπτωση του υλικού σημείου, σε στερεό σώμα μιας και το στερεό σώμα αποτελείται από ένα μεγάλο πλήθος υλικών σημείων. Θεωρούμε ένα στερεό σώμα το οποίο περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα zz΄ με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$.



Κατά την περιστροφή του σώματος, τα διάφορα υλικά σημεία του διαγράφουν κυκλικές τροχιές με τα επίπεδά τους κάθετα στον άξονα περιστροφής. Χωρίζουμε το στερεό σε στοιχειώδεις μάζες (υλικά σημεία) m_1, m_2,..., m_n οι οποίες έχουν ίδια γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ και γραμμικές ταχύτητες που τα μέτρα τους δίνονται από τις σχέσεις :

$$\upsilon_1=\omega\cdot r_1,\ \upsilon_2=\omega\cdot r_2,\ \upsilon_3=\omega\cdot r_3,\ldots\upsilon_n=\omega\cdot r_n.$$

Το καθένα υλικό σημείο έχει μια στροφορμή που δίνεται από την σχέση : $L=m\cdot\upsilon\cdot r$. Δηλαδή :

$$L_1=m_1\cdot\upsilon_1\cdot r_1,\ L_2=m_2\cdot\upsilon_2\cdot r_2,\ L_3=m_3\cdot\upsilon_3\cdot r_3,\ldots L_n=m_n\cdot\upsilon_n\cdot r_n.$$

Από τις τελευταίες σχέσεις προκύπτει :

$$L_1=m_1\cdot\omega\cdot r_1^2,\ L_2=m_2\cdot\omega\cdot r_2^2,\ L_3=m_3\cdot\omega\cdot r_3^2,\ldots L_n=m_n\cdot\omega\cdot r_n^2.$$

Η συνολική στροφορμή του στερεού, θα είναι ίση με το διανυσματικό άθροισμα των επιμέρους στροφορμών των υλικών σημείων από τα οποία αποτελείται το στερεό. Συνεπώς :

$$L=L_1+L_2+L_3+\ldots L_n\Leftrightarrow L=m_1\cdot\omega\cdot r_1^2+m_2\cdot\omega\cdot r_2^2+m_3\cdot\omega\cdot r_3^2+\ldots+m_n\cdot\omega\cdot r_n^2=\left(m_1\cdot r_1^2+m_2\cdot r_2^2+m_3\cdot r_3^2+\ldots+m_n\cdot r_n^2\right)\cdot\omega$$

Όμως $I=m_1\cdot r_1^2+m_2\cdot r_2^2+m_3\cdot r_3^2+\ldots m_n\cdot r_n^2$, είναι η ροπή αδρανείας του στερεού ως προς τον άξονα περιστροφής του. Τελικά, η στροφορμή ενός στερεού σώματος που περιστρέφεται περί ενός άξονα με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$, είναι ίση με κατά μέτρο :

$$L=I\cdot\omega.$$

Και εδώ η διεύθυνση της στροφορμής συμπίπτει με την διεύθυνση του άξονα περιστροφής και η φορά της δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Όταν μιλάμε για ένα σύστημα σωμάτων, η ολική στροφορμή του συστήματος θα είναι ίση με το διανυσματικό άθροισμα των στροφορμών των στερεών σωμάτων που απαρτίζουν το σύστημα.

Γενικευμένη μορφή του θεμελιώδη νόμου της στροφικής κίνησης.

Όπως έχουμε αναφέρει ο θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης αναφέρει ότι : $\Sigma\vec{\tau} = I \cdot \vec{\alpha}_\gamma$.

Ο ορισμός της στροφορμής δίνει : $\vec{L} = I \cdot \vec{\omega} \Leftrightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = I \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} \Leftrightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = I \cdot \vec{\alpha}_\gamma$.

Άρα :

$$\Sigma\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} .$$

Κατά μέτρο : $\Sigma\tau = \frac{dL}{dt}$.

Δηλαδή η αλγεβρική τιμή του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής ενός στερεού είναι ίση με την συνισταμένη των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο στερεό. Τα μεγέθη $\Sigma\tau$ και L αναφέρονται ως προς τον **ίδιο** άξονα περιστροφής.

Συνεπώς όταν η **συνισταμένη των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων είναι ίση με μηδέν,** τότε :

$$\frac{dL}{dt} = 0 \Leftrightarrow L_1 = L_2 \Leftrightarrow I \cdot \omega_1 = I \cdot \omega_2 .$$

πράγμα που σημαίνει ότι η στροφορμή του στερεού διατηρείται σταθερή. Αυτό αποτελεί μια βασική αρχή της φυσικής που ονομάζεται **Αρχή Διατήρησης της Στροφορμής**, η οποία αναφέρει ότι: όταν σ' ένα στερεό (και κατ' επέκταση σε ένα σύστημα σωμάτων) η συνισταμένη των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων είναι ίση με μηδέν, τότε η στροφορμή του στερεού (άρα και του συστήματος) παραμένει σταθερή.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ :

1) η σχέση $\Sigma\tau = \frac{dL}{dt}$, είναι γενική και ισχύει ακόμα και όταν η ροπή αδρανείας ενός σώματος μεταβάλλεται, ενώ η σχέση $\Sigma\vec{\tau} = I \cdot \vec{\alpha}_\gamma$, ισχύει μόνο όταν η ροπή αδράνειας του σώματος είναι σταθερή.

2) η σχέση $L_1 = L_2 \Leftrightarrow I \cdot \omega_1 = I \cdot \omega_2$, ισχύει όταν η συνισταμένη των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων είναι ίση με μηδέν αλλά **και** όταν η (ή οι) δύναμη (-μεις) που το περιστρέφει (-φουν) εφαρμόζεται (-ονται) σε άξονα ο οποίος είναι παράλληλος στον ά.π. του.

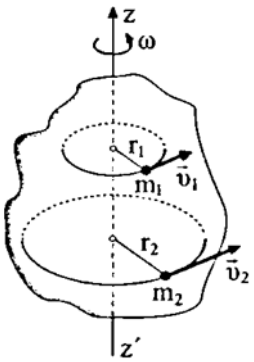
Κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής.

Μέχρι τώρα γνωρίζουμε ότι όταν ένα σώμα έχει ταχύτητα, θα έχει και κινητική ενέργεια που δίνεται από την σχέση :

$$K = \frac{1}{2} m \cdot u_{cm}^2 ,$$

όπου m είναι η μάζα του σώματος.

Όταν το σώμα εκτός της μεταφορικής του κίνησης, εκτελεί και στροφική, θα έχει και κάποια κινητική ενέργεια λόγω της γωνιακής του ταχύτητας.



Χωρίζουμε και πάλι το στερεό σε στοιχειώδεις μάζες (υλικά σημεία) m_1, m_2,..., m_n οι οποίες έχουν ίδια γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ και γραμμικές ταχύτητες που τα μέτρα τους δίνονται από τις σχέσεις :

$$\upsilon_1 = \omega \cdot r_1,\ \upsilon_2 = \omega \cdot r_2,\ \upsilon_3 = \omega \cdot r_3, \ldots \upsilon_n = \omega \cdot r_n .$$

Το καθένα υλικό σημείο έχει μια κινητική ενέργεια που δίνεται από την σχέση : $K = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon_{cm}^2$.

Δηλαδή :

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 \cdot \upsilon_{cm_1}^2,\ K_2 = \frac{1}{2} m_2 \cdot \upsilon_{cm_2}^2,\ K_3 = \frac{1}{2} m_3 \cdot \upsilon_{cm_3}^2, \ldots, K_n = \frac{1}{2} m_n \cdot \upsilon_{cm_n}^2 .$$

Από τις τελευταίες σχέσεις προκύπτει :

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 \cdot \omega^2 \cdot r_1^2,\ K_2 = \frac{1}{2} m_2 \cdot \omega^2 \cdot r_2^2,\ K_3 = \frac{1}{2} m_3 \cdot \omega^2 \cdot r_3^2, \ldots, K_n = \frac{1}{2} m_n \cdot \omega^2 \cdot r_n^2 .$$

ή συνολικά για την στροφική κινητική ενέργεια του στερεού :

$$K_{\sigma\tau\rho.} = K_1 + K_2 + K_3 + \ldots + K_n = \frac{1}{2} m_1 \cdot \omega^2 \cdot r_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot \omega^2 \cdot r_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \cdot \omega^2 \cdot r_3^2 + \ldots + \frac{1}{2} m_n \cdot \omega^2 \cdot r_n^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow K_{\sigma\tau\rho.} = \frac{1}{2}\left(m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + m_3 \cdot r_3^2 + \ldots + m_n \cdot r_n^2\right) \cdot \omega^2 .$$

Όμως $I = m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + m_3 \cdot r_3^2 + \ldots m_n \cdot r_n^2$, είναι η ροπή αδρανείας του στερεού ως προς τον άξονα περιστροφής του. Τελικά, η κινητική ενέργεια του στερεού λόγω στροφικής κίνησης θα είναι ίση με :

$$K_{\sigma\tau\rho.} = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2 .$$

Συνολικά για ένα στερεό σώμα που εκτελεί ταυτόχρονα και μεταφορική και στροφική κίνηση, η κινητική του ενέργεια θα είναι :

$$K_{o\lambda.} = K_{cm} + K_{\sigma\tau\rho.} \Leftrightarrow K_{o\lambda.} = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2} . I \cdot \omega^2 .$$

Έργο δύναμης κατά την στροφική κίνηση.

Έστω ότι έχουμε έναν τροχό που μπορεί να στρέφεται γύρω από άξονα, ο οποίος περνά από το κέντρο του K και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Στον τροχό ασκούμε μια εφαπτομενική δύναμη $\vec{F}$.

Σε μια απειροστά μικρή στροφή του τροχού κατά γωνία dθ το έργο της δύναμης $\vec{F}$ θα είναι :

$$dW = F \cdot ds$$

όπου ds είναι το μήκος του τόξου που έχει διαγράψει ο τροχός και αντιστοιχεί στη γωνία dθ. Όταν η γωνία μετριέται σε ακτίνια (rad), ισχύει $ds = R \cdot d\theta$, γιατί σε γωνία 2π αντιστοιχεί τόξο 2πR, άρα σε γωνία dθ θα αντιστοιχεί τόξο :

$$ds = \frac{2\pi R \cdot d\theta}{2\pi} = R \cdot d\theta .$$

Οπότε :

$$dW = F \cdot ds \Leftrightarrow dW = F \cdot R \cdot d\theta .$$

Το γινόμενο όμως $F \cdot R$ αντιστοιχεί στο μέτρο της ροπής τ_F της δύναμης $\vec{F}$. Τελικά έχουμε :

$$dW = \tau_F\, d\theta.$$

ενώ σε περίπτωση όπου η ροπή είναι σταθερή, αθροίζοντας όλα τα επιμέρους έργα θα πάρουμε :

$$W = \tau_F\, \theta.$$

Παίρνοντας την χρονική μεταβολή της σχέσης $dW=\tau_F\, d\theta$, προκύπτει :

$$dW = \tau_F\, d\theta \Leftrightarrow \frac{dW}{dt} = \tau_F \frac{d\theta}{dt} \Leftrightarrow \frac{dW}{dt} = \tau_F \cdot \omega.$$

Όμως ο λόγος $\frac{dW}{dt}$ είναι ο ρυθμός προσφοράς ενέργειας στο σώμα, και τον ονομάζουμε ισχύ P της δύναμης $\vec{F}$ που στρέφει τον τροχό. Τελικά η ισχύς της εφαπτομενικής δύναμης που στρέφει τον τροχό, είναι ίση με :

$$P = \tau_F \cdot \omega.$$

Στην καθαρά μεταφορική κίνηση, είχαμε μάθει το γνωστό θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.) ή θεώρημα έργου-ενέργειας, που έλεγε ότι η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ενός σώματος είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των έργων των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα, ($\Delta K_{cm} = K_{\tau\varepsilon\lambda.} - K_{\alpha\rho\chi.} = \sum W_F$).

Στην στροφική κίνηση, έχουμε κινητική ενέργεια λόγω στροφικής κίνησης, άρα το παραπάνω θεώρημα γίνεται :

$$\Delta K_{\sigma\tau\rho.} = K_{\tau\varepsilon\lambda.} - K_{\alpha\rho\chi.} = \sum W_F \Leftrightarrow \frac{1}{2}\, I\, \omega^2_{\tau\varepsilon\lambda.} - \frac{1}{2}\, I\, \omega^2_{\alpha\rho\chi.} = \sum W_F\ .$$

Άρα αν ένα σώμα εκτελεί σύνθετη κίνηση, το θεώρημα ενέργειας-έργου, δίνει :

$$K^{o\lambda.}_{\tau\varepsilon\lambda.} - K^{o\lambda.}_{\alpha\rho\chi.} = \sum W_F \Leftrightarrow (\frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2_{cm_{\tau\varepsilon\lambda}} + \frac{1}{2}\, I\, \omega^2_{\tau\varepsilon\lambda.}) - (\frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2_{cm_{\alpha\rho\chi}} + \frac{1}{2}\, I\, \omega^2_{\alpha\rho\chi.}) = \sum_{cm} W_F + \sum_{\sigma\tau\rho} W_{\tau_F}\ .$$

Πότε ένα στερεό σώμα κάνει κύλιση και όχι ολίσθηση ;

Οι συνθήκες που πρέπει να πληρούνται, έστω και μία, έτσι ώστε ένα στερεό σώμα να εκτελεί κύλιση χωρίς ταυτόχρονη ολίσθηση είναι :

- ✓ να μην υπάρχει σχετική κίνηση του σημείου επαφής του σώματος, π.χ. τροχός, με το επίπεδο πάνω στο οποίο κινείται. Έτσι στην σελίδα 6, το σημείο Γ να έχει συνισταμένη ταχύτητα ίση με μηδέν.
- ✓ όλα τα σημεία του τροχού να έχουν σταθερή μεταφορική ταχύτητα, η οποία ταυτίζεται με την ταχύτητα κίνησης του οχήματος (ομαλή μεταφορική κίνηση) ή σταθερή μεταφορική επιτάχυνση (ομαλά μεταβαλλόμενη μεταφορική κίνηση).
- ✓ όλα τα σημεία του τροχού να έχουν σταθερή γωνιακή ταχύτητα (ομαλή στροφική κίνηση) ή σταθερή γωνιακή επιτάχυνση (ομαλά μεταβαλλόμενη στροφική κίνηση) γύρω από τον άξονα περιστροφής.
- ✓ να επαληθεύονται οι σχέσεις που συνδέουν τα μεταφορικά και τα στροφικά μεγέθη, δηλαδή : $x = r \cdot \theta$, $\upsilon_{\gamma\rho.} = \upsilon_{cm} = \omega \cdot r$ και $\alpha_{\varepsilon.} = \alpha_{cm} = \alpha_{\gamma} \cdot r$.
- ✓ να επαληθεύονται όλες οι σχέσεις που ισχύουν στην καθαρά μεταφορική και στροφική κίνηση.
- ✓ θα πρέπει σε κάθε σημείο του σώματος, π.χ. τροχός, η συνισταμένη ταχύτητα και επιτάχυνση να δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις : $\vec{\upsilon}_{ολ.} = \vec{\upsilon}_{cm} + \vec{\upsilon}_{\gamma\rho.}$ και $\vec{\alpha}_{ολ.} = \vec{\alpha}_{cm} + \vec{\alpha}_{\gamma\rho} + \vec{\alpha}_{κεντρ.}$.
- ✓ ο αριθμός των περιστροφών που κάνει ο τροχός να δίνεται από τις παρακάτω αναλογίες :

σε 1 κύκλο έχει διανύσει διάστημα 2πR και έχει διαγράψει γωνία 2π.

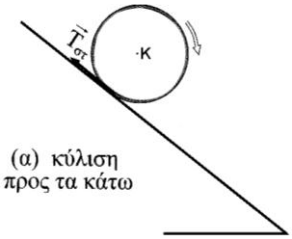
σε N κύκλους έχει διανύσει διάστημα x και έχει διαγράψει γωνία θ.

Άρα $N = \dfrac{x}{2\pi R}$ και $N = \dfrac{\theta}{2\pi}$.

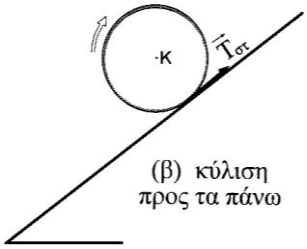
- ✓ όταν υπάρχει στατική τριβή, θα πρέπει να ισχύει $0 < T_{στ.} < \mu_{στ.} \cdot N$, όπου N η κάθετη αντίδραση και $\mu_{στ.}$ ο συντελεστής στατικής τριβής. Στην οριακή περίπτωση όπου το σώμα είναι έτοιμο να ολισθήσει θα ισχύει : $T_{στ.(max)} = \mu_{στ.(max)} \cdot N$.
- ✓ το έργο της στατικής τριβής είναι ίσο με μηδέν, μιας και δεν μετατοπίζεται το σημείο εφαρμογής της, μιας και το σημείο επαφής του σώματος, π.χ. τροχός, με το επίπεδο πάνω στο οποίο κινείται, δεν ολισθαίνει.

Πως σχεδιάζεται η φορά της στατικής τριβής όταν το σώμα ανέρχεται ή κατέρχεται από κεκλιμένο επίπεδο;

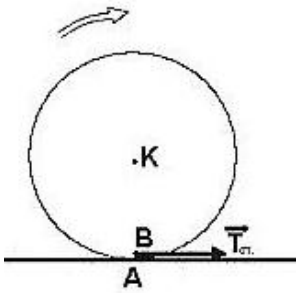
Για τον σχεδιασμό της στατικής τριβής πρέπει να σκεφτόμαστε ότι είναι η μόνη δύναμη (εκτός και αν ασκήσουμε εμείς εξωτερικά κάποια που δίνει ροπή), η οποία είναι υπεύθυνη για την στροφική κίνηση του σώματος και άρα είναι η μόνη δύναμη που θα αυξάνει ή θα μειώνει τη γωνιακή ταχύτητα του σώματος, π.χ. κύλινδρος, σφαίρα, δίσκος.



♦ Όταν το σώμα, π.χ. κύλινδρος, κυλίεται σε πλάγιο επίπεδο προς τα κάτω, το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του $(\vec{\upsilon}_{cm})$ αυξάνεται, με αποτέλεσμα να αυξάνεται και το μέτρο της γωνιακής του ταχύτητας $(\vec{\omega})$. Άρα, στην περίπτωση αυτή, αφού η στατική τριβή $\vec{T}_{\sigma\tau.}$. είναι η μόνη δύναμη που έχει ροπή ως προς τον ά.π. του σώματος, πρέπει να τείνει να περιστρέψει το σώμα κατά τη φορά περιστροφής του.



♦ Όταν το σώμα, π.χ. κύλινδρος, κυλίεται σε πλάγιο επίπεδο προς τα πάνω, το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του $(\vec{\upsilon}_{cm})$ μειώνεται, με αποτέλεσμα να μειώνεται και το μέτρο της γωνιακής του ταχύτητας $(\vec{\omega})$. Άρα, στην περίπτωση αυτή, η στατική τριβή $\vec{T}_{\sigma\tau.}$ πρέπει να τείνει να περιστρέψει το σώμα αντίθετα από τη φορά περιστροφής του.



Υπάρχουν περιπτώσεις που δεν είναι εύκολο να προσδιοριστεί η φορά της στατικής τριβής. Για παράδειγμα, στην περίπτωση του τροχού ενός αυτοκινήτου τη στιγμή που ξεκινάει σε οριζόντιο δρόμο, η φορά βρίσκεται ευκολότερα, αν χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό : **"τριβή είναι η δύναμη που αντιτίθεται στη (σχετική) κίνηση δύο σωμάτων που βρίσκονται σε επαφή"**. Όπως βλέπουμε στο σχήμα, αν δεν υπήρχε στατική τριβή ο τροχός θα ολίσθαινε (σημείο Α ακίνητο, σημείο Β κινούμενο προς τα πίσω). Επομένως, υπάρχει στατική τριβή με φορά προς τα εμπρός, ώστε ο τροχός να μην ολισθαίνει. Στο ίδιο αποτέλεσμα οδηγεί και ο θεμελιώδης νόμος της μηχανικής. Για να αποκτήσει το αυτοκίνητο επιτάχυνση προς τα εμπρός, πρέπει η δύναμη της στατικής τριβής που το θέτει σε κίνηση να έχει την ίδια φορά. Όλα τα παραπάνω ισχύουν και όταν ο κύλινδρος κυλίεται και ταυτόχρονα ολισθαίνει. Η μόνη διαφορά είναι ότι στην περίπτωση αυτή η τριβή είναι τριβή ολίσθησης και όχι στατική τριβή.

ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΤΡΟΦΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ

	Μεταφορική κίνηση	**Στροφική κίνηση**
1.	Μετατόπιση $\Delta\vec{x}$.	Γωνιακή μετατόπιση ή γωνία θ.
2.	Ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{cm} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$.	Γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$.
3.	Επιτάχυνση $\vec{\alpha}_{cm} = \frac{\Delta\vec{\upsilon}_{cm}}{\Delta t}$.	Γωνιακή επιτάχυνση $\vec{\alpha}_{\gamma} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$.
4.	Δύναμη $\vec{F}$.	Ροπή δύναμης $\vec{\tau}_F$.
5.	Μάζα m.	Ροπή αδράνειας I.
6.	$x=\upsilon_{cm} \cdot t$ (Ε.Ο.Κ.).	$\theta=\omega \cdot t$. (Ομαλή Στροφική Κίνηση).
7.	$\begin{cases} \upsilon_{cm} = \upsilon_{o_{cm}} \pm \lvert\alpha_{cm}\rvert \cdot t \\ x = \upsilon_{o_{cm}} \cdot t \pm \frac{1}{2} \cdot \lvert\alpha_{cm}\rvert \cdot t^2 \end{cases}$. (Ευθύγραμμη Ομαλά Μεταβαλλόμενη Κίνηση).	$\left.\begin{array}{l} \omega = \omega_o \pm \lvert\alpha_{\gamma}\rvert \cdot t \\ \theta = \omega_o \cdot t \pm \frac{1}{2} \cdot \lvert\alpha_{\gamma}\rvert \cdot t^2 \end{array}\right\}$. (Ομαλά Μεταβαλλόμενη Στροφική Κίνηση).
8.	Θεμελιώδης νόμος της Μηχανικής $\Sigma\vec{F} = m \cdot \vec{\alpha}_{cm}$.	Θεμελιώδης νόμος της Στροφικής $\Sigma\vec{\tau} = I \cdot \vec{\alpha}_{\gamma}$.
9.	Ορμή $\vec{p} = m \cdot \vec{\upsilon}_{cm}$.	Στροφορμή υλικού σημείου $L=m \cdot \upsilon_{cm} \cdot r$. Στροφορμή στερεού σώματος $L=I \cdot \omega$.
10.	Γενικευμένη μορφή θεμελιώδη νόμου της Μηχανικής. $\Sigma\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$.	Γενικευμένη μορφή θεμελιώδη νόμου της Στροφικής. $\Sigma\vec{\tau}_F = \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t}$.
11.	Διατήρηση της ορμής. Αν $\Sigma\vec{F}_{\varepsilon\xi.}=0$, τότε $\vec{p}$ =σταθ.	Διατήρηση της στροφορμής. Αν $\Sigma\vec{\tau}_{\varepsilon\xi.}=0$, τότε $\vec{L}$ =σταθ.
12.	Έργο δύναμης $W = F \cdot x \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$.	Έργο δύναμης στην στροφική κίνηση $W=\tau_{\varepsilon\xi.} \cdot \theta$.
13.	Ισχύς δύναμης $P = F \cdot \upsilon_{cm}$.	Ισχύς ροπής δύναμης $P = \tau_F \cdot \omega$.
14.	Μεταφορική Κινητική ενέργεια $K_{cm} = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon_{cm}^2$.	Στροφική Κινητική ενέργεια $K_{\sigma\tau\rho.} = \frac{1}{2} I \omega^2$.
15.	Θ.Μ.Κ.Ε. : $\frac{1}{2} m \cdot \upsilon_{cm_{\tau\varepsilon\lambda}}^2 - \frac{1}{2} m \cdot \upsilon_{cm_{\alpha\rho\chi}}^2 = \sum W_F$.	Θ.Μ.Κ.Ε. : $\frac{1}{2} I \omega_{\tau\varepsilon\lambda.}^2 - \frac{1}{2} I \omega_{\alpha\rho\chi.}^2 = \sum_{\sigma\tau\rho} W_{\tau_F}$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κινηματική στροφικής και σύνθετης κίνησης.

a. Η συνολική ταχύτητα κάθε σημείου είναι ίση με το διανυσματικό άθροισμα της $\vec{\upsilon}_{cm}$ και $\vec{\upsilon}_{\gamma\rho}$. Τα μέτρα των ταχυτήτων αυτών είναι ίσα **ΜΟΝΟ** όταν το σώμα εκτελεί Κύλιση και όχι Ολίσθηση.

b. Όταν η άσκηση ζητάει (ή δίνει δεδομένο) τον αριθμό των περιστροφών που κάνει ένα στερεό, θα πρέπει να αποδείξουμε τις παρακάτω αναλογίες :

Σε 1 κύκλο έχει διανύσει διάστημα 2πR και έχει διαγράψει γωνία 2π.

Σε N κύκλους έχει διανύσει διάστημα x και έχει διαγράψει γωνία θ. Άρα :

$$N = \frac{x}{2\pi R} = \frac{\theta}{2\pi}.$$

Ροπή δύναμης και ισορροπία στερεού σώματος.

c. Για να βρούμε την ροπή μιας οποιασδήποτε δύναμης, πρέπει να θυμόμαστε ότι :

α) πρέπει να την έχουμε (αν χρειάζεται) αναλύσει σε συνιστώσες.

β) με βάση τον κανόνα του ρολογιού, θα υπολογίζουμε το πρόσημο της κάθε ροπής ξεχωριστά.

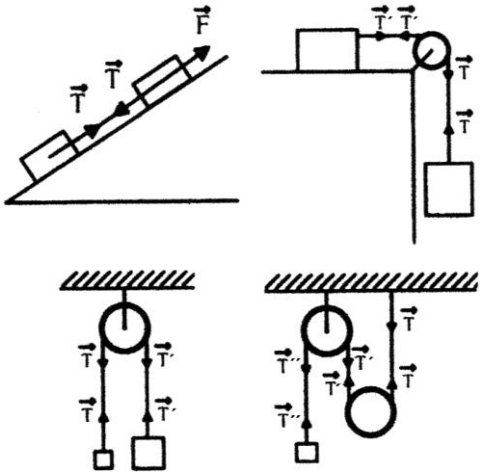
γ) όσον δυνάμεων ο φορέας διέρχεται από το σημείο ή τον άξονα περιστροφής, οι δυνάμεις δεν έχουν μοχλοβραχίονα, άρα δεν δίνουν ροπή.

d. Όταν η άσκηση μας ζητάει το ελάχιστο μέτρο μιας δύναμης που δίνει μια συγκεκριμένη ροπή, θα πρέπει να εκμεταλλευόμαστε τον μέγιστο μοχλοβραχίονα.

e. Για να εξετάσουμε την ισορροπία ενός στερεού σώματος, εκτελούμε τα παρακάτω βήματα :

Α) Σχεδιάζουμε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα. Οι δυνάμεις που ασκούνται σ' ένα σώμα χωρίζονται σε δύο κατηγορίες : στις **δυνάμεις επαφής** και στις **δυνάμεις πεδίου**. Οι πρώτες ασκούνται στο σώμα όταν αυτό έλθει σε επαφή μ' ένα άλλο ή με κάποια επιφάνεια, π.χ. τριβή, δύναμη ελατηρίου, τάση νήματος, δυνάμεις από αρθρώσεις (μεντεσέδες). Οι δεύτερες ασκούνται σ' ένα σώμα από απόσταση, π.χ. βάρος. Για να σχεδιάσουμε τις δυνάμεις πρέπει να έχουμε υπ' όψη μας τα εξής :

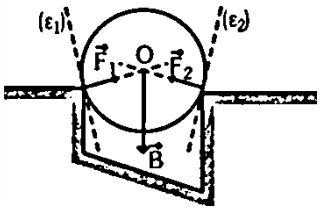
- **Το βάρος ($\vec{w}$),** είναι πάντα κατακόρυφο και με φορά προς τα κάτω. Σ' ένα ομογενές σώμα, εφαρμόζεται στο κέντρο μάζας του σώματος.
- Όταν ένα σώμα είναι δεμένο μ' ένα αβαρές νήμα, πάνω στο σώμα ασκείται μια δύναμη από το νήμα, την οποία ονομάζουμε **τάση νήματος** ($\vec{T}$) και η οποία έχει την κατεύθυνση από το σημείο πρόσδεσης σώματος - νήματος και προς το νήμα. Οι τάσεις του νήματος που εμφανίζονται στα άκρα του ίδιου νήματος, έχουν ΠΑΝΤΑ ίσα μέτρα, αλλά αντίθετες φορές. Στην περίπτωση που το σύστημά μας αποτελείται από σώματα που συνδέονται μεταξύ τους με νήμα μέσω μιας ή περισσότερων τροχαλιών, τότε οι τάσεις που αναπτύσσονται κατά μήκος του νήματος έχουν ίσα μέτρα. Αυτό όμως με τις εξής προϋποθέσεις : **(α)** το νήμα είναι ιδανικό (αβαρές και μη εκτατό), **(β)** όλο το σύστημα ισορροπεί, **(γ)** η τροχαλία δεν έχει μάζα, ή αν έχει δεν περιστρέφεται, **(δ)** το νήμα δεν ολισθαίνει μέσα στο αυλάκι της τροχαλίας.



Σε αντίθετες περιπτώσεις οι τάσεις στις δύο πλευρές της τροχαλίας δεν έχουν ίσα μέτρα, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

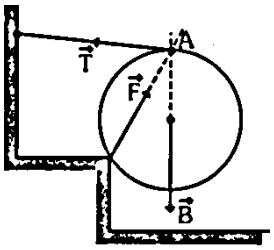
- **Αντίδραση επιπέδου.** Την αντίδραση επιπέδου την σχεδιάζουμε **κάθετα** στο επίπεδο **ΜΟΝΟ** όταν το **επίπεδο είναι λείο**. Σε περίπτωση επιπέδου στο οποίο **υπάρχει τριβή,** θα σχεδιάζουμε όλες τις γνωστές δυνάμεις και θα προεκτείνουμε τους φορείς τους. Από το σημείο τομής των φορέων θα πρέπει να διέρχεται και ο φορέας της αντίδρασης του επιπέδου. Στην συνέχεια, αν χρειαστεί, την αναλύουμε στις κάθετες συνιστώσες της. Η συνιστώσα στον άξονα xx΄ θα παίζει τον ρόλο της τριβής και η συνιστώσα στον άξονα yy΄ θα είναι η κάθετη αντίδραση του δαπέδου.

Στήριξη σε οξεία ακμή χωρίς τριβή.



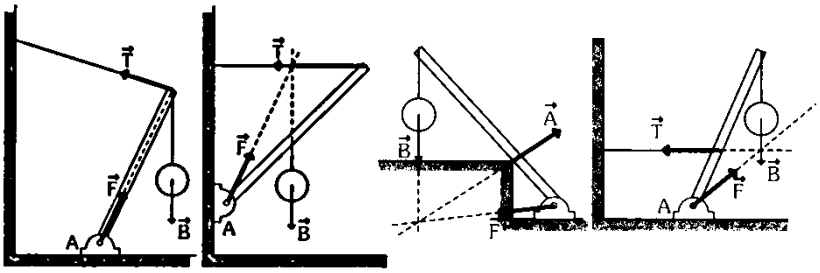
Οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ που ασκούνται στην σφαίρα από τις οξείες ακμές, έχουν φορέα κάθετο προς τα κοινά εφαπτόμενα επίπεδα (ε_1), (ε_2) μεταξύ σφαίρας και οξειών ακμών.

Στήριξη σε οξεία ακμή με τάση.



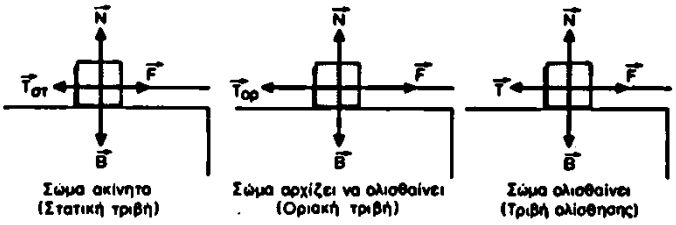
Η δύναμη $\vec{F}$ που ασκείται στην σφαίρα από την οξεία ακμή, έχει γενικά άγνωστο φορέα, ο οποίος καθορίζεται από τα εκάστοτε δεδομένα του προβλήματος. Όταν η σφαίρα ισορροπεί, ο φορέας της $\vec{F}$ περνάει από το σημείο Α στο οποίο τέμνονται όλοι οι άλλοι φορείς των υπολοίπων δυνάμεων, όπως το βάρος και η τάση του νήματος.

- **Στήριξη σε άρθρωση.**



Άρθρωση Α, λέμε την σύνδεση γύρω από την οποία μπορεί να περιστρέφεται μια ράβδος (ή μία δοκός). Τότε η δύναμη $\vec{F}$ που δέχεται η ράβδος από το στήριγμα μέσω της άρθρωσης, έχει γενικά τυχαία διεύθυνση και φορά. Πρώτα σχεδιάσουμε όλες τις άλλες δυνάμεις που δέχεται η ράβδος και μετά σχεδιάζουμε τον φορέα της $\vec{F}$ να περνάει (όταν έχουμε ισορροπία) από το σημείο τομής των φορέων των άλλων δυνάμεων που ασκούνται στην ράβδο και η φορά της $\vec{F}$ είναι από το στήριγμα και προς τα έξω.

- **Τριβή.** Η τριβή κατά την κύλιση χωρίς ολίσθηση είναι **στατική** και όχι ολίσθησης. Σχεδιάζεται πάντα στο σημείο επαφής του επιπέδου με το σώμα και η φορά της είναι τέτοια έτσι ώστε να δίνει την επιθυμητή ροπή που αναφέρει η άσκηση. Όταν το σώμα παραμένει ακίνητο, τότε η τριβή που δέχεται λέγεται **στατική τριβή ($\vec{T}_{\sigma\tau.}$).** Όταν η οριζόντια δύναμη που ασκούμε στο σώμα, αυξηθεί, τότε θα υπάρξει μια στιγμή στην οποία το σώμα τείνει να ολισθήσει πάνω στο επίπεδο. Η τιμή της αντίθετης τριβής σ' αυτή την περίπτωση ονομάζεται **οριακή τριβή ($\vec{T}_{op.}$).** Όταν τέλος η οριζόντια δύναμη γίνει αρκετά μεγάλη, έτσι ώστε να γίνει μεγαλύτερη της οριακής, το σώμα ολισθαίνει πάνω στο επίπεδο και τότε η τριβή ονομάζεται **τριβή ολίσθησης ($\vec{T}_{ολ.}$).**



Καταλαβαίνουμε συνεπώς ότι καθώς η οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ αυξάνεται, αυξάνεται και η τιμή της στατικής τριβής μέχρι μια μέγιστη τιμή που αποτελεί την οριακή τριβή. Από εκεί και πέρα ξεκινά η ολίσθηση, άρα

εμφανίζεται η τρίτη μορφή της τριβής, η τριβή ολίσθησης, η οποία έχει συγκεκριμένη σταθερή τιμή μικρότερη της οριακής τριβής.

Συντελεστής οριακής τριβής ($\mu_{ορ.}$) ονομάζεται το πηλίκο του μέτρου της οριακής τριβής προς το μέτρο της κάθετης αντίδρασης του επιπέδου. Δηλαδή :

$$\mu_{ορ.} = \frac{T_{ορ.}}{N}.$$

Συντελεστής τριβής ολίσθησης ($\mu_{ολ.}$) ονομάζεται το πηλίκο του μέτρου της τριβής ολίσθησης προς το μέτρο της κάθετης αντίδρασης του επιπέδου. Δηλαδή :

$$\mu_{ολ.} = \frac{T_{ολ.}}{N}.$$

Εννοείται ότι ο συντελεστής οριακής τριβής είναι μεγαλύτερος από τον συντελεστή της τριβής ολίσθησης, αλλά στην πράξη πολλές φορές τους θεωρούμε ίσους.

Β) Αναλύουμε όλες τις δυνάμεις σε συνιστώσες. Επιλέγουμε έτσι το ορθοκανονικό μας σύστημα ώστε να περιέχει τις περισσότερες από τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα μας. Αναλύουμε όσες δυνάμεις χρειάζονται ανάλυση και εκφράζουμε τις συνιστώσες συναρτήσει της γωνίας που σχηματίζει η αντίστοιχη συνισταμένη με το οριζόντιο επίπεδο (Fημφ είναι η συνιστώσα απέναντι από την γωνία και Fσυνφ είναι η συνιστώσα που είναι προσκείμενη στην γωνία).

Γ) Εφαρμόζουμε τις συνθήκες ισορροπίας.

f. Η σχέση $T=\mu \cdot N$ υπολογίζει την μέγιστη τιμή της στατικής τριβής, Σε περίπτωση όπου το σώμα δεν είναι σε οριακή κατάσταση για να ολισθήσει, τότε για την τριβή **ΔΕΝ μπορεί** να γράψουμε την παραπάνω σχέση. Στην τελευταία περίπτωση ή όταν το σώμα εκτελεί κύλιση και όχι ολίσθηση, η στατική τριβή υπολογίζεται από τις συνθήκες ισορροπίας ή τις εξισώσεις κίνησης, αντίστοιχα.

g. Όταν σε ένα σώμα που ισορροπεί, ασκούνται τρεις (3) ομοεπίπεδες δυνάμεις, θα πρέπει οι φορείς τους να διέρχονται από το ίδιο σημείο. Έστω ότι οι φορείς των δύο διέρχονται από το ίδιο σημείο. Άρα οι ροπές των δυνάμεων αυτών ως προς το σημείο αυτό θα είναι μηδέν. Επειδή όμως το σώμα ισορροπεί, θα πρέπει και η ροπή της τρίτης δύναμης ως προς το σημείο αυτό να είναι ίση με μηδέν, άρα ο μοχλοβραχίονάς της να είναι μηδέν. Συνεπώς θα πρέπει και ο φορέας της τρίτης δύναμης να διέρχεται από το ίδιο σημείο όπου διέρχονται και οι υπόλοιποι δύο φορείς.

h. Όταν σ' ένα σώμα που ισορροπεί, ασκούνται ν δυνάμεις από τις οποίες οι ν-1 είναι παράλληλες, τότε η ν-οστή δύναμη πρέπει να είναι παράλληλη με τις άλλες.

i. Όταν ένα σώμα που ισορροπεί, στηρίζεται σε στηρίγματα και είναι έτοιμο να χάσει επαφή, τότε εφαρμόζουμε τις συνθήκες ισορροπίας την στιγμή όπου χάνει επαφή, θεωρώντας ότι η αντίδραση του στηρίγματος που έχει χάσει επαφή είναι μηδέν.

j. Όταν μελετάμε την ισορροπία δύο σωμάτων, αρχίζουμε από το σώμα στο οποίο ασκούνται οι λιγότερες δυνάμεις. Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι σε κάθε δράση υπάρχει και μια αντίδραση.

Ροπή αδράνειας - Θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης.

k. Προσέχουμε την εκφώνηση της άσκησης, για να δούμε αν πρέπει να πάρουμε ή όχι το θεώρημα Steiner για τον υπολογισμό της ροπής αδράνειας του σώματος. Αν η άσκηση μας δίνει μια ροπή ως προς έναν ά.π. και το σώμα περιστρέφεται ως προς έναν άλλον ά.π. τότε η χρήση του θεωρήματος Steiner είναι υποχρεωτική.

l. Η ροπή αδράνειας και η συνισταμένη των ροπών στον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης πρέπει να υπολογίζονται ως προς **τον ίδιο ά.π.**

m. Όταν θέλουμε να βρούμε την συνισταμένη των ροπών, **ΔΕΝ** ισχύει ο κανόνας του ρολογιού. Όσες δυνάμεις δίνουν ροπές ομόρροπες της γωνιακής επιτάχυνσης είναι θετικές, αλλιώς αρνητικές. Ισχύουν δηλαδή τα ίδια πράγματα που ισχύουν όταν εφαρμόζουμε στον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής ($\Sigma\vec{F} = m \cdot \vec{\alpha}_{cm}$).

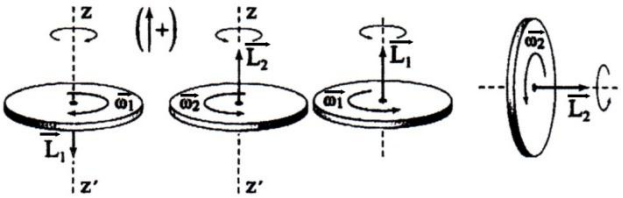
n. Σε σώματα που εκτελούν σύνθετη κίνηση (κύλιση και όχι ολίσθηση), δεν πρέπει να ξεχνάμε τις σχέσεις που συνδέουν τα στροφικά με τα μεταφορικά μεγέθη.

ο. Όταν υπάρχει στατική τριβή, θα πρέπει να ισχύει $0 < T_{στ.} < \mu_{στ.} \cdot N$, όπου N είναι η κάθετη αντίδραση και $\mu_{στ.}$ ο συντελεστής στατικής τριβής, έτσι ώστε το σώμα να εκτελεί κύλιση και όχι ολίσθηση. Στην οριακή περίπτωση όπου το σώμα είναι έτοιμο να ολισθήσει θα ισχύει: $T_{στ.(max)} = \mu_{στ.(max)} \cdot N$.

Στροφορμή - Διατήρηση της στροφορμής.

p. Η σχέση $L = m \cdot \upsilon_{cm} \cdot r$ δίνει την στροφορμή υλικού σημείου που περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα περιστροφής, ενώ η σχέση $L = I \cdot \omega$ δίνει την στροφορμή στερεού σώματος που περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα περιστροφής.

q. Όταν μεταβάλλεται το επίπεδο περιστροφής του σώματος, τότε μεταβάλλεται και η κατεύθυνση της στροφορμής του. Το μέτρο της μεταβολής $\Delta\vec{L}$ της στροφορμής υπολογίζεται διανυσματικά :



$$\Delta\vec{L} = \vec{L}_{τελ.} - \vec{L}_{αρχ.} = \vec{L}_{τελ.} + \left(-\vec{L}_{αρχ.}\right),$$

ενώ κατά μέτρο υπολογίζεται από τον κανόνα των συνημιτόνων.

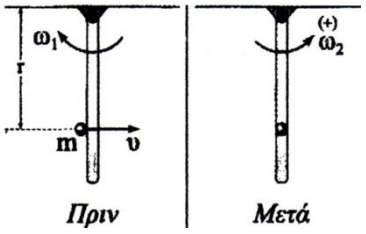
Για παράδειγμα αν η φορά περιστροφής του σώματος αναστραφεί, τότε αναστρέφεται και η φορά της στροφορμής του. Το μέτρο της μεταβολής της στροφορμής είναι :

$$\Delta L = L_{τελ.} + (-L_{αρχ.}) = L_2 + [-(-L_1)] = L_2 + L_1 = I \cdot \omega_2 + I \cdot \omega_1.$$

Αν ο άξονας περιστροφής στραφεί κατά 90°, τότε το μέτρο της μεταβολής της στροφορμής είναι :

$$\Delta L = \sqrt{L_2^2 + L_1^2} \Leftrightarrow \Delta L = \sqrt{\left(I \cdot \omega_2\right)^2 + \left(I \cdot \omega_1\right)^2}.$$

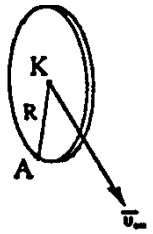
r. Όπως γνωρίζουμε σε περιπτώσεις κρούσεων (ελαστικών ή πλαστικών), εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης της Ορμής. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις όπου μετά την κρούση, κάποιο στερεό σώμα εκτελεί στροφική κίνηση. Για να λάβουμε υπ' όψη μας και αυτή την κίνηση, θα εφαρμόζουμε αντί της Α.Δ.Ο., την Αρχή Διατήρησης της Στροφορμής, δηλαδή : $L_{πριν} = L_{μετά} \Leftrightarrow m \cdot \upsilon_{cm} \cdot r - I \cdot \omega_1 = (m \cdot r^2 + I) \cdot \omega_2$, όπου I και $m \cdot r^2$ οι ροπές αδράνειας της ράβδου και της σφαίρας, αντίστοιχα.



Κινητική ενέργεια περιστροφικής κίνησης - Θ.Μ.Κ.Ε. - Α.Δ.Ε. στην στροφική κίνηση.

s. Όταν ένα στερεό εκτελεί σύνθετη κίνηση, κύλιση και όχι ολίσθηση, τότε θα έχει κινητική ενέργεια και λόγω της μεταφορικής του κίνησης ($K_{cm} = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon_{cm}^2$) και λόγω της στροφικής του κίνησης ($K_{στρ.} = \frac{1}{2} I \omega^2$).

t. Την σύνθετη κίνηση μπορούμε να την θεωρήσουμε μόνο ως μια καθαρά στροφική κίνηση γύρω από τον στιγμιαίο ά.π. Συγκεκριμένα στο σχήμα, η κινητική ενέργεια του σώματος, θα είναι ίση με την κινητική



ενέργεια λόγω καθαρής στροφικής κίνησης, γύρω από τον στιγμιαίο ά.π., δηλαδή : $K = \frac{1}{2} I_{(A)} \omega^2$. Όμως :

$I_{(A)} = I_{(cm)} + M \cdot R^2$. Άρα :

$$K = \frac{1}{2} I_{(cm)} \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} M \cdot R^2 \cdot \omega^2 \Leftrightarrow K = \frac{1}{2} I_{(cm)} \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} M \cdot \upsilon_{cm}^2 \Leftrightarrow K = K_{\sigma\tau\rho.cm} + K_{cm}.$$

u. Το **Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας** (Θ.Μ.Κ.Ε.) εφαρμόζεται σε όλες τις περιπτώσεις όπου θέλουμε να βρούμε ταχύτητες, αποστάσεις ή και έργα δυνάμεων, όταν δεν εμπλέκεται ο χρόνος κίνησης. Για την εφαρμογή του ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα :

- Βρίσκουμε την ολική κινητική ενέργεια (μεταφορική και στροφική) του στερεού σώματος στην αρχική και τελική θέση.
- Σχεδιάζουμε το σώμα σε μια τυχαία θέση, καθώς και τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω του. Όσες δυνάμεις χρειάζονται ανάλυση, τις αναλύουμε σε κατάλληλο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.
- Υπολογίζουμε τα έργα όλων των δυνάμεων προσέχοντας το πρόσημό τους. Όσες δυνάμεις «αντιστέκονται» στην κίνηση έχουν αρνητικό μεταφορικό έργο, αλλιώς θετικό, ενώ όσες είναι κάθετες στην μετατόπιση, δεν έχουν έργο.
- Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι όταν το σώμα κάνει κύλιση και όχι ολίσθηση, το έργο της στατικής τριβής είναι ίσο με μηδέν μιας και δεν μετατοπίζεται το σημείο εφαρμογής της, αφού ασκείται σε ολοένα και καινούργιο σημείο. **Η στατική τριβή δίνει την στροφική κίνηση στο στερεό αλλά δεν έχει έργο.**

v. Οπότε αφού παρόλο που υπάρχει τριβή αυτή δεν καταναλώνει έργο, εκτός του Θ.Μ.Κ.Ε., μπορούμε να εφαρμόσουμε και την **Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας (Α.Δ.Μ.Ε.).** Πρώτα από όλα θα πρέπει να παίρνουμε ένα αυθαίρετο επίπεδο στο οποίο η βαρυτική δυναμική ενέργεια να είναι μηδέν. Τα βήματα που θα ακολουθούμε θα είναι τα εξής :

- Βρίσκουμε την ολική ενέργεια (κινητική λόγω μεταφοράς, κινητική λόγω στροφικής και βαρυτική δυναμική ενέργεια) στην αρχική και τελική θέση. Αφού η ολική ενέργεια διατηρείται, αυτή θα πρέπει να είναι ίση στις δύο παραπάνω θέσεις. Δηλαδή :

$$E_{\alpha\rho\chi.} = E_{\tau\varepsilon\lambda.} \Leftrightarrow K_{\alpha\rho\chi.}^{cm} + K_{\alpha\rho\chi.}^{\sigma\tau\rho.} + U_{\alpha\rho\chi.} = K_{\tau\varepsilon\lambda.}^{cm} + K_{\tau\varepsilon\lambda.}^{\sigma\tau\rho.} + U_{\tau\varepsilon\lambda.}$$

- Η βαρυτική δυναμική ενέργεια ισούται με $U_{\beta\alpha\rho}$=mgh, όπου **h είναι η απόσταση του κέντρου μάζας του σώματος, από το επίπεδο όπου έχουμε ορίσει αυθαίρετα $U_{\beta\alpha\rho}$=0.**
- Στην γενικότερη περίπτωση όπου έχουμε και ελατήριο, στην δυναμική ενέργεια πρέπει να λάβουμε υπ' όψη μας και την δυναμική ενέργεια του παραμορφωμένου ελατηρίου, δηλαδή : $U_{\varepsilon\lambda.} = \frac{1}{2} k \cdot x^2$, όπου x η παραμόρφωση του ελατηρίου, δηλαδή η απόστασή από την θέση φυσικού μήκους.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

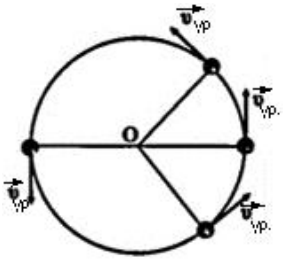
	ΣΧΕΣΗ	ΕΡΜΗΝΕΙΑ
	ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ	
1.	$\vec{\upsilon}_{cm} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$.	Ταχύτητα μεταφορικής κίνησης.
2.	$\vec{\alpha}_{cm} = \frac{\Delta\vec{\upsilon}_{cm}}{\Delta t}$.	Επιτάχυνση μεταφορικής κίνησης.
3.	$x=\upsilon_{cm}\cdot t$.	Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.
4.	$\left.\begin{array}{l}\upsilon_{cm} = \upsilon_{o_{cm}} \pm \lvert\alpha_{cm}\rvert\cdot t \\ x = \upsilon_{o_{cm}}\cdot t \pm \frac{1}{2}\cdot\lvert\alpha_{cm}\rvert\cdot t^2\end{array}\right\}$.	Ευθύγραμμη Ομαλά Μεταβαλλόμενη Κίνηση.
5.	$\Sigma\vec{F} = m\cdot\vec{\alpha}_{cm}$.	Θεμελιώδης νόμος της Μηχανικής.
6.	$\vec{p} = m\cdot\vec{\upsilon}_{cm}$.	Ορμή.
7.	$\Sigma\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$.	Γενικευμένη μορφή θεμελιώδη νόμου της Μηχανικής.
8.	Αν $\Sigma\vec{F}_{\varepsilon\xi.}=0$, τότε $\vec{p}$ =σταθ.	Αρχή Διατήρησης της Ορμής.
9.	$K_{cm} = \frac{1}{2}m\cdot\upsilon_{cm}^2$.	Μεταφορική Κινητική Ενέργεια.
10.	$P=F\cdot\upsilon_{cm}$.	Ισχύς δύναμης.
	ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ	
11.	$\vec{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$.	Γωνιακή ταχύτητα.
12.	$\vec{\upsilon}_{\gamma\rho.} = \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t}$.	Γραμμική ταχύτητα.
13.	$\vec{\alpha}_{\gamma} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$.	Γωνιακή επιτάχυνση.
14.	$\vec{\alpha}_{\gamma\rho.} = \frac{\Delta\vec{\upsilon}_{\gamma\rho.}}{\Delta t}$.	Γραμμική (επιτρόχιος) επιτάχυνση.
15.	$\alpha_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho.} = \frac{\upsilon_{\gamma\rho.}^2}{R}$.	Κεντρομόλος επιτάχυνση.
16.	$\alpha = \sqrt{\alpha_{\gamma\rho.}^2 + \alpha_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho.}^2}$.	Συνολική επιτάχυνση στην στροφική κίνηση.
17.	$\theta=\omega\cdot t$.	Ομαλή Στροφική Κίνηση. **Θέλει απόδειξη.**
18.	$\left.\begin{array}{l}\omega = \omega_o \pm \lvert\alpha_{\gamma}\rvert\cdot t \\ \theta = \omega_o\cdot t \pm \frac{1}{2}\cdot\lvert\alpha_{\gamma}\rvert\cdot t^2\end{array}\right\}$.	Ομαλά Μεταβαλλόμενη Στροφική Κίνηση. **Θέλουν απόδειξη.**
19.	$\vec{\tau}_F$. ($\tau_F=F\cdot\ell$).	Ροπή δύναμης.
20.	$\begin{array}{l}\Sigma\vec{F}=0 \\ \Sigma\vec{\tau}=0\end{array}$.	Συνθήκες ισορροπίας.
21.	$I_{cm}=m\cdot r^2$.	Ροπή αδράνειας.
22.	$I_A=I_{cm}+M\cdot d^2$.	Θεώρημα Steiner.
23.	$\Sigma\vec{\tau} = I\cdot\vec{\alpha}_{\gamma}$.	Θεμελιώδης νόμος της Στροφικής.

24.	$L=m\cdot \upsilon_{cm}\cdot r.$ $L=I\cdot \omega.$	Στροφορμή υλικού σημείου. Στροφορμή στερεού σώματος.
25.	$\Sigma\vec{\tau}_F=\frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t}.$	Γενικευμένη μορφή θεμελιώδη νόμου της Στροφικής.
26.	Αν $\Sigma\vec{\tau}_{\varepsilon\xi.}=0$, τότε $\vec{L}=$σταθ.	Αρχή Διατήρησης της Στροφορμής.
27.	$K_{\sigma\tau\rho.}=\frac{1}{2}I\,\omega^2.$	Στροφική Κινητική Ενέργεια.
28.	$W=\tau_{\varepsilon\xi.}\cdot\theta.$	Έργο δύναμης στην στροφική κίνηση.
29.	$P=\tau_F\cdot\omega.$	Ισχύς ροπής δύναμης.
ΣΥΝΘΕΤΗ ΚΙΝΗΣΗ (ΚΥΛΙΣΗ ΚΑΙ ΟΧΙ ΟΛΙΣΘΗΣΗ)		
30.	$\Delta s=R\cdot\Delta\theta.$	Σχέση τόξου και επίκεντρης γωνίας.
31.	$\upsilon_{cm}=\upsilon_{\gamma\rho.}=\omega\cdot R.$	Σχέση γραμμικής και γωνιακής ταχύτητας.
32.	$\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\rho.}=\alpha_{\gamma}\cdot R.$	Σχέση γωνιακής και μεταφορικής επιτάχυνσης.
33.	$\alpha=\sqrt{\left(\alpha_{cm}+\alpha_{\gamma\rho.}\right)^2+\alpha_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho.}^2}.$	Συνολική επιτάχυνση στερεού.
34.	$N=\frac{x}{2\pi R}=\frac{\theta}{2\pi}.$	Αριθμός περιστροφών. **Θέλουν απόδειξη.**
35.	$\left(K_{\tau\varepsilon\lambda.}^{cm}+K_{\tau\varepsilon\lambda.}^{\sigma\tau\rho.}\right)-\left(K_{\alpha\rho\chi.}^{cm}+K_{\alpha\rho\chi.}^{\sigma\tau\rho.}\right)=\sum_{cm}W_F+\sum_{\sigma\tau\rho.}\tau_F.$	Θ.Μ.Κ.Ε.
36.	$K_{\alpha\rho\chi.}^{cm}+K_{\alpha\rho\chi.}^{\sigma\tau\rho.}+U_{\alpha\rho\chi.}=K_{\tau\varepsilon\lambda.}^{cm}+K_{\tau\varepsilon\lambda.}^{\sigma\tau\rho.}+U_{\tau\varepsilon\lambda.}.$	Α.Δ.Μ.Ε.

ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

Κυκλική κίνηση.

Λέμε ότι ένα κινητό εκτελεί κυκλική κίνηση, όταν η τροχιά που διαγράφει είναι περιφέρεια κύκλου. Ένας δεύτερος ορισμός της κυκλικής κίνησης είναι και ο εξής : Ένα σώμα λέμε ότι κάνει κυκλική κίνηση, όταν κάθε στιγμή πάνω του ασκείται μία σταθερή δύναμη η οποία είναι **ΠΑΝΤΑ** κάθετη στην διεύθυνση της ταχύτητάς του. Η δύναμη αυτή, λέγεται κεντρομόλος δύναμη και ισούται με :



$$F = m \cdot \alpha_K \Leftrightarrow F = m \cdot \frac{\upsilon^2}{R},$$

όπου α_K είναι η κεντρομόλος επιτάχυνση. Το μέγεθος που μεταβάλλεται και αποδίδει την επιτάχυνση $\vec{\alpha}_\kappa$, είναι η διεύθυνση της ταχύτητας, η οποία είναι συνεχώς εφαπτομενική πάνω στην περιφέρεια της κυκλικής τροχιάς. Μια ειδική περίπτωση κυκλικής κίνησης είναι η ομαλή κυκλική κίνηση στην οποία το μέτρο της ταχύτητας είναι πάντα σταθερό. Η ομαλή κυκλική κίνηση είναι μία περιοδική κίνηση, οπότε περιγράφεται από την περίοδο (T), την συχνότητα (f) και την γωνιακή ταχύτητα (ω).

<u>Περίοδος (T)</u> ονομάζεται ο χρόνος που απαιτείται για μια πλήρη επανάληψη της κίνησης. Αν σε χρόνο t γίνονται N επαναλήψεις της κίνησης, ισχύει :

$$T = \frac{t}{N}.$$

Η περίοδος (T) μετριέται σε δευτερόλεπτα (s).

<u>Συχνότητα (f)</u> ενός περιοδικού φαινομένου, ονομάζεται το πηλίκο του αριθμού των επαναλήψεων της κίνησης που γίνονται σε χρόνο t, προς τον χρόνο αυτό. Δηλαδή :

$$f = \frac{N}{t}.$$

Η συχνότητα (f) μετριέται σε Hertz (1 sec^{-1}=1 Hz).

Επειδή για N=1 (μία ταλάντωση) έχουμε t=T, ισχύει :

$$f = \frac{1}{T}.$$

δηλαδή η συχνότητα f και η περίοδος T είναι μεγέθη αντίστροφα.

<u>Γωνιακή ταχύτητα (ω)</u> ενός περιοδικού φαινομένου, είναι το διανυσματικό μέγεθος του οποίου η διεύθυνση καθορίζεται από το δεξιό χέρι. Αν τα δάκτυλά μας έχουν την διεύθυνση της κίνησης, ο αντίχειρας μας δίνει την διεύθυνση της γωνιακής ταχύτητας. Άρα είναι πάντα κάθετη στο επίπεδο της κίνησης. Η σχέση που μας δίνει το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας είναι η παρακάτω :

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t},$$

δηλαδή παρατηρούμε ότι μας δίνει τον ρυθμό με τον οποίο η επιβατική ακτίνα διαγράφει γωνίες. Αν αντικαταστήσουμε τον χρόνο t, με την περίοδο T, δηλαδή τον χρόνο που χρειάζεται το κινητό για να κάνει μία πλήρη περιφορά, η γωνία που θα έχει διαγραφεί θα είναι ίση με ένα κύκλο, δηλαδή ίση με 2π. Άρα τελικά θα πάρουμε για την γωνιακή ταχύτητα :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f,$$

δηλαδή εκφράζει τον αριθμό των επαναλήψεων της επαναλαμβανόμενης κίνησης σε χρόνο (2π) sec, όπου π=3,14. Μονάδα μέτρησης της γωνιακής συχνότητας (ω) είναι το 1 rad/sec.

Το ακτίνιο (ή rad) είναι η γωνία που όταν γίνει επίκεντρη ενός κύκλου (Ο,ρ), βαίνει σε τόξο που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα ρ του κύκλου αυτού, δηλαδή σε τόξο 1 ακτινίου (1 rad). Η σχέση που συνδέει τα ακτίνια με τις μοίρες είναι η:

$$\alpha = \frac{\pi\mu}{180^\circ}.$$

όπου α είναι η γωνία σε ακτίνια, μ είναι η γωνία σε μοίρες.

Γραμμική ταχύτητα.

Όπως αναφέραμε, το μέτρο της ταχύτητας στην ομαλή κυκλική κίνηση παραμένει σταθερή. Αυτό δηλώνει ότι σε ίσους χρόνους το κινητό διανύει ίσα τόξα. Άρα ισχύει η σχέση :

$$\upsilon = \frac{s}{t}.$$

Αν αντικαταστήσουμε όμως τον χρόνο t, με την περίοδο T, δηλαδή τον χρόνο που χρειάζεται το κινητό για να κάνει μία πλήρη περιφορά, το τόξο που θα έχει διαγραφεί θα είναι ίσο με την περιφέρεια του κύκλου, δηλαδή ίσο με 2πR. Άρα τελικά θα πάρουμε για την γραμμική ταχύτητα :

$$\upsilon = \frac{2\pi R}{T}.$$

Η γραμμική ταχύτητα μας δίνει τον ρυθμό με τον οποίο διανύει το κινητό διαστήματα (τόξα).

Από τις σχέσεις που δίνουν την γραμμική και την γωνιακή ταχύτητα στην ομαλή κυκλική κίνηση, παίρνουμε μια βασικότατη σχέση που συνδέει και τα δύο μεγέθη. Συγκεκριμένα :

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \frac{2\pi}{T} \\ \upsilon &= \frac{2\pi R}{T} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \upsilon = \omega \cdot R.$$

Άρα σημεία τα οποία βρίσκονται πάνω στην ίδια επιβατική ακτίνα, έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα ($\vec{\omega}$) μιας και έχουν διαγράψει την ίδια γωνία, αλλά έχουν διαφορετική γραμμική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{cm}$ λόγω του ότι απέχουν διαφορετικές αποστάσεις από το κέντρο, άρα έχουν διαφορετικές ακτίνες.

Παρατηρήσεις :

- Από τις σχέσεις $\upsilon = \frac{2\pi R}{T}$ και $f = \frac{N}{t}$, μπορούμε να βρούμε τον αριθμό των περιστροφών (N) που κάνει το κινητό σε χρόνο t. Συγκεκριμένα :

$$\upsilon = \frac{2\pi R}{T} \Leftrightarrow \upsilon = 2\pi R f \Leftrightarrow \upsilon = 2\pi R\frac{N}{t} \Leftrightarrow N = \frac{\upsilon t}{2\pi R}.$$

Όμως s=υ · t, δηλαδή το μήκος του τόξου που διένυσε το κινητό. Άρα :

$$N = \frac{\upsilon t}{2\pi R} \Leftrightarrow N = \frac{s}{2\pi R}.$$

Η τελευταία σχέση μετατρέπεται και ως εξής :

$$N = \frac{\upsilon t}{2\pi R} \Leftrightarrow N = \frac{\omega R t}{2\pi R} \Leftrightarrow N = \frac{\omega t}{2\pi}.$$

Όμως θ=ω · t, δηλαδή η γωνία που διένυσε το κινητό. Άρα :

$$N = \frac{\omega t}{2\pi} \Leftrightarrow N = \frac{\theta}{2\pi}.$$

- Όταν ένας τροχός ακτίνας R κυλάει χωρίς να ολισθαίνει, τότε σε κάθε πλήρη περιστροφή του, ο τροχός μετατοπίζεται κατά διάστημα ίσο με το μήκος της περιφέρειάς του, δηλαδή :

$$S=2\pi R.$$

Κεντρομόλος επιτάχυνση.

Όταν ένα κινητό διαγράφει καμπυλόγραμμη τροχιά, η επιτάχυνση που μπορεί να έχει, μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες : την γραμμική (ή επιτρόχια) επιτάχυνση $\vec{\alpha}_{\gamma\rho}$, η οποία είναι υπεύθυνη για την μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας του κινητού και την κεντρομόλο επιτάχυνση $\vec{\alpha}_{\kappa}$ η οποία είναι υπεύθυνη για την μεταβολή της διεύθυνσης της ταχύτητας του κινητού.

Στην ομαλή κυκλική κίνηση, μιας και το μέτρο της ταχύτητας του κινητού παραμένει πάντα σταθερό, καταλαβαίνουμε ότι το μέτρο της γραμμικής επιτάχυνσης είναι ίσο με μηδέν. Αντίθετα η κεντρομόλος επιτάχυνση υπάρχει και προέρχεται από την μεταβολή της διεύθυνσης της ταχύτητας του κινητού, η οποία είναι πάντα κάθετη στην επιβατική ακτίνα άρα πάντα εφαπτόμενη στην κυκλική τροχιά του κινητού. Η διεύθυνση της κεντρομόλου επιτάχυνσης είναι πάντα κάθετη στην γραμμική ταχύτητα, δηλαδή είναι πάντα ομόρροπη της επιβατικής ακτίνας και με φορά προς το κέντρο της τροχιάς. Αποδεικνύεται ότι η κεντρομόλος επιτάχυνση δίνεται από την σχέση :

$$\alpha_{\kappa} = \frac{\upsilon_{\gamma\rho}^2}{R}.$$

Μονάδες της κεντρομόλου επιταχύνσεως είναι το ένα m/s^2.

Συγκεντρωτικά τα μεγέθη που εμφανίζονται στην ομαλή κυκλική κίνηση φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Μέγεθος	**T**	**f**	$\upsilon_{\gamma\rho}$	α_{κ}
T	-	$\frac{1}{f}$	$\frac{2\pi R}{\upsilon_{\gamma\rho}}$	$2\pi\sqrt{\frac{R}{\alpha_{\kappa}}}$
f	$\frac{1}{T}$	-	$\frac{\upsilon_{\gamma\rho}}{2\pi R}$	$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\alpha_{\kappa}}{R}}$
$\upsilon_{\gamma\rho}$	$\frac{2\pi R}{T}$	$2\pi Rf$	-	$\sqrt{\alpha_{\kappa}R}$
α_{κ}	$\frac{4\pi^2R}{T^2}$	$4\pi^2f^2R$	$\frac{\upsilon_{\gamma\rho}^2}{R}$	-

Κεντρομόλος δύναμη.

Είπαμε ότι όταν σ' ένα σώμα ασκείται μία δύναμη η οποία είναι πάντα κάθετη στην διεύθυνση της ταχύτητάς του, το σώμα εκτελεί κυκλική κίνηση. Η δύναμη αυτή ονομάζεται κεντρομόλος δύναμη και δεν είναι καμία καινούργια δύναμη. Πάντα κάποια από τις γνωστές δυνάμεις, π.χ. τριβή, ηλεκτρική δύναμη Coulomb κ.τ.λ., ή η συνισταμένη δύναμη, θα παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης.

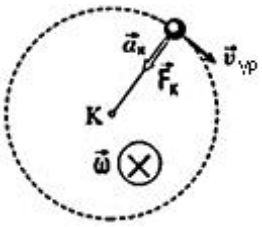
Όπως έχουμε πει, στην ομαλή κυκλική κίνηση, το μέτρο της ταχύτητας του κινητού παραμένει σταθερό, πράγμα που δεν συμβαίνει και στην διεύθυνσή της. Έτσι αναπτύσσεται η κεντρομόλος επιτάχυνση. Με βάση όμως τον 2° νόμο του Νεύτωνα, η επιτάχυνση, προέρχεται από κάποια δύναμη (ή συνισταμένη δύναμη). Άρα, ουσιαστικά η αιτία προέλευσης της κεντρομόλου δύναμης είναι η μεταβολή της διεύθυνσης της ταχύτητας του κινητού που εκτελεί την ομαλή κυκλική κίνηση.

Η σχέση που δίνει την κεντρομόλο δύναμη, προκύπτει με απλή εφαρμογή του $2^{ου}$ νόμου του Νεύτωνα. Έτσι :

$$\left.\begin{array}{l} F_\kappa = m\cdot\alpha_\kappa \\ \alpha_\kappa = \dfrac{\upsilon^2}{R} \end{array}\right\} \Leftrightarrow F_\kappa = \frac{m\cdot\upsilon^2}{R},$$

ή

$$\left.\begin{array}{l} F_\kappa = \dfrac{m\cdot\upsilon^2}{R} \\ \upsilon = \omega\cdot R \end{array}\right\} \Leftrightarrow F_\kappa = \frac{m\cdot(\omega\cdot R)^2}{R} = \frac{m\cdot\omega^2\cdot R^2}{R} \Leftrightarrow F_\kappa = m\cdot\omega^2\cdot R.$$



Η διεύθυνση της κεντρομόλου δύναμης είναι **ΠΑΝΤΑ** προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς, είναι δηλαδή ομόρροπη με την κεντρομόλο επιτάχυνση.

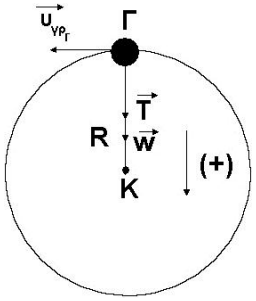
Η τελευταία σχέση αποτελεί την ικανή και αναγκαία συνθήκη για να κάνει ένα κινητό ομαλή κυκλική κίνηση.

Τα μεγέθη που εμφανίζονται στην ομαλή κυκλική κίνηση, φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

Ανακύκλωση.

Όταν ένα σώμα διαγράφει κατακόρυφο κύκλο, ζητείται συχνά η συνθήκη που επιτρέπει στο σώμα να εκτελέσει ανα-ύλωση, δηλαδή να μπορέσει να περάσει από το ανώτερο σημείο της τροχιάς του και να ολοκληρώσει την κυκλική του τροχιά. Δύο χαρακτηριστικές περιπτώσεις είναι οι παρακάτω :

<u>α. Σώμα δεμένο στο άκρο νήματος.</u>



Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, όταν αυτό είναι στην ανώτερη θέση Γ της κυκλικής του τροχιάς, είναι το βάρος $\vec{w}$ και η τάση του νήματος $\vec{T}$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Καθώς το σώμα κινείται εκτελώντας την κατακόρυφη κυκλική τροχιά, η τάση του νήματος μεταβάλλεται και παίρνει την ελάχιστη τιμή της στην ανώτερη θέση Γ της τροχιάς, (βγαίνει εύκολά με την εφαρμογή της κεντρομόλου δύναμης). Για να συμβεί ανακύκλωση θα πρέπει στο ανώτερο σημείο Γ, το νήμα να παραμείνει οριακά τεντωμένο, δηλαδή να ισχύει $T \geq 0$, ή οριακά T=0.

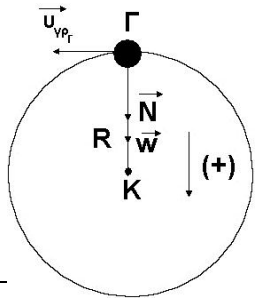
Έστω $\vec{\upsilon}_{\gamma\rho_\Gamma}$ η γραμμική ταχύτητα του σώματος στην ανώτερη θέση Γ. Εφαρμόζοντας την κεντρομόλο δύναμη, παίρνουμε :

$$\Sigma F = F_{\kappa\epsilon\nu\tau\rho.} = m\frac{\upsilon^2_{\gamma\rho_\Gamma}}{R} \Rightarrow T + w = m\frac{\upsilon^2_{\gamma\rho_\Gamma}}{R} \Rightarrow T = m\left(\frac{\upsilon^2_{\gamma\rho_\Gamma}}{R} - g\right).$$

Οριακά $T = 0 \Leftrightarrow m\left(\dfrac{\upsilon^2_{\gamma\rho_\Gamma}}{R} - g\right) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\upsilon^2_{\gamma\rho_\Gamma}}{R} = g \Leftrightarrow \upsilon_{\gamma\rho_\Gamma} = \sqrt{g\cdot R}$.

Η τελευταία σχέση μας δίνει την ελάχιστη ταχύτητα που πρέπει να έχει το σώμα μάζας m στο ανώτερο σημείο της κατακόρυφης κυκλικής του τροχιάς, για να εκτελέσει αυτό ανακύκλωση.

<u>β. Σώμα κινούμενο σε κατακόρυφο επίπεδο, στο εσωτερικό κυκλικής στεφάνης.</u>



Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, όταν αυτό είναι στην ανώτερη θέση Γ της κυκλικής του τροχιάς, είναι το βάρος $\vec{w}$ και η αντίδραση του δαπέδου $\vec{N}$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Για να συμβεί ανακύκλωση θα πρέπει στο ανώτερο σημείο Γ, το σώμα να μην χάσει επαφή με τον κυκλικό δρόμο, δηλαδή να ισχύει $N \geq 0$, ή οριακά N=0.

Έστω $\vec{\upsilon}_{\gamma\rho_\Gamma}$ η γραμμική ταχύτητα του σώματος στην ανώτερη θέση Γ. Εφαρμόζοντας την κεντρομόλο δύναμη, παίρνουμε :

$$\Sigma F = F_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho.} = m\frac{\upsilon_{\gamma\rho_\Gamma}^2}{R} \Rightarrow N + w = m\frac{\upsilon_{\gamma\rho_\Gamma}^2}{R} \Rightarrow N = m\left(\frac{\upsilon_{\gamma\rho_\Gamma}^2}{R} - g\right).$$

Οριακά $N = 0 \Leftrightarrow m\left(\frac{\upsilon_{\gamma\rho_\Gamma}^2}{R} - g\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\upsilon_{\gamma\rho_\Gamma}^2}{R} = g \Leftrightarrow \upsilon_{\gamma\rho_\Gamma} = \sqrt{g \cdot R}$.

Η τελευταία σχέση μας δίνει την ελάχιστη ταχύτητα που πρέπει να έχει το σώμα μάζας m στο ανώτερο σημείο της κατακόρυφης κυκλικής του τροχιάς, για να εκτελέσει αυτό ανακύκλωση.

Από τι εξαρτάται η τριβή ολίσθησης ;

Η τριβή ολίσθησης $T_{ολ.}$ είναι :

- ανεξάρτητη από το εμβαδόν των επιφανειών που τρίβονται.
- ανεξάρτητη από την σχετική ταχύτητα των επιφανειών που τρίβονται.
- εξαρτάται από την φύση των επιφανειών που τρίβονται.
- είναι ανάλογη της κάθετης αντίδρασης N από το δάπεδο, δηλαδή T=μN.

Συντηρητικές και μη συντηρητικές δυνάμεις.

Συντηρητικές ονομάζονται οι δυνάμεις εκείνες το έργο των οποίων σε κλειστή διαδρομή είναι ίσο με μηδέν ή το έργο τους δεν εξαρτάται από την διαδρομή αλλά μόνο από την αρχική και την τελική θέση. Σε αντίθεση, μη συντηρητικές δυνάμεις ονομάζονται οι δυνάμεις εκείνες των οποίων το έργο σε κλειστή διαδρομή δεν είναι ίσο με μηδέν ή το έργο τους εξαρτάται από την διαδρομή.

Παραδείγματα συντηρητικών δυνάμεων είναι : το βάρος, η δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου, η τάση του νήματος, οι αντιδράσεις των επιφανειών, οι ηλεκτροστατικές δυνάμεις, ενώ μη συντηρητικών δυνάμεων η τριβή και οι μαγνητικές δυνάμεις.

Έργο δύναμης.

Έστω ότι μια δύναμη $\vec{F}$ ασκείται σ' ένα σώμα μάζας m και το μετακινεί κατά x. Το γινόμενο του μέτρου της δύναμης επί την μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της είναι ίσο με την ενέργεια που έχει μεταφερθεί στο σώμα από την δύναμη, ή είναι ίσο με το ποσό της ενέργειας που μετασχηματίστηκε σε κάποια άλλη μορφή ενέργειας, π.χ. θερμότητα. Το ποσό αυτό της ενέργειας ονομάζεται έργο (W) της δύναμης $\vec{F}$.

Δηλαδή το έργο εμφανίζεται κάθε φορά που έχουμε μεταφορά ενέργειας από ένα σώμα σ' ένα άλλο ή μετατροπή ενέργειας από μια μορφή σε μια άλλη. Συνεπώς, το έργο έχει μια συγκεκριμένη φυσική σημασία και εκφράζει :

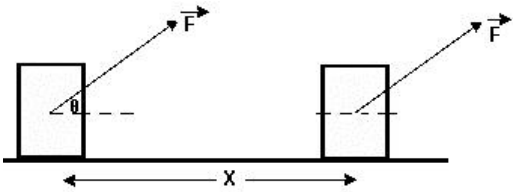
α) την ενέργεια που μεταφέρεται από ένα σώμα Α σ' ένα άλλο σώμα Β. Δηλαδή :

$$\text{ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΩΜΑΤΟΣ Α} \xrightarrow{\text{ΜΕΣΩ ΕΡΓΟΥ W}} \text{ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΩΜΑΤΟΣ Β.}$$

β) την ενέργεια που μετατρέπεται από μια μορφή E_1 σε μια άλλη μορφή E_2. Δηλαδή :

$$\text{ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΜΟΡΦΗΣ } E_1 \xrightarrow{\text{ΜΕΣΩ ΕΡΓΟΥ W}} \text{ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΜΟΡΦΗΣ } E_2.$$

Έργο δύναμης σταθερού μέτρου.



Έργο W μιας σταθερής δύναμης $\vec{F}$, όταν το σημείο εφαρμογής της μετατοπίζεται ευθύγραμμα κατά διάστημα x, ονομάζουμε το μονόμετρο μέγεθος που ορίζεται από τη σχέση :

$$W=F\cdot x\cdot \text{συν}\theta,$$

όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ της δύναμης $\vec{F}$ και της μετατόπισης x. Μονάδα μέτρησης του έργου στο σύστημα S.I. είναι το 1Joule=1N · m.

Επειδή το μέτρο F της δύναμης και το μέτρο x της μετατόπισης είναι μη αρνητικοί αριθμοί, το πρόσημο του έργου καθορίζεται από την τιμή της γωνίας θ.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις ανάλογα με την τιμή που θα πάει η γωνία θ :

- Η δύναμη και η μετατόπιση είναι της ίδιας κατεύθυνσης. Άρα η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ τους είναι 0°. Τότε συν0^o=1 και το έργο της δύναμης είναι ίσο με : $W=F\cdot x>0$. Θετικό έργο σημαίνει ότι η δύναμη μεταβιβάζει ενέργεια μέσω του έργου στο σώμα, (ωφέλιμο έργο). Άρα το σώμα κερδίζει ενέργεια.
- Η δύναμη και η μετατόπιση είναι της ίδιας διεύθυνσης αλλά αντίθετης φοράς, είναι δηλαδή αντίρροπες. Άρα η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ τους είναι 180°. και συν180^o=-1. Το έργο της δύναμης είναι ίσο με : $W=-F\cdot x<0$. Αρνητικό έργο σημαίνει ότι η δύναμη καταναλώνει έργο, (καταναλισκόμενο έργο). Χαρακτηριστικό παράδειγμα δύναμης της οποίας το έργο είναι **ΠΑΝΤΑ** αρνητικό είναι η τριβή ολίσθησης. Επειδή η δύναμη της τριβής ολίσθησης είναι πάντα αντίρροπη με την μετατόπιση, το έργο της θα είναι πάντα ίσο με $W_T=-T\cdot s$, το οποίο εκδηλώνεται ως θερμότητα.
- Η δύναμη και η μετατόπιση να είναι κάθετες μεταξύ τους. Άρα η μεταξύ τους γωνία είναι ίση με 90°. Τότε συν90^o=0 και το έργο της δύναμης είναι ίσο με : W=0. Συνεπώς δυνάμεις οι οποίες παραμένουν συνεχώς κάθετες στην μετατόπιση έχουν έργο ίσο με μηδέν. Δηλαδή δεν παράγουν αλλά ούτε καταναλίσκουν έργο . Χαρακτηριστικά παραδείγματα δυνάμεων των οποίων το έργο είναι ίσο με μηδέν είναι η κάθετη αντίδραση (η οποία είναι **ΠΑΝΤΑ** κάθετη στην μετατόπιση) αλλά και το βάρος (**ΜΟΝΟ** όταν το σώμα κινείται σε οριζόντιο επίπεδο). Άρα οι παραπάνω δυνάμεις δεν μεταβιβάζουν ενέργεια μέσω του έργου τους στο σώμα, και το σώμα ούτε κερδίζει αλλά ούτε και χάνει ενέργεια.

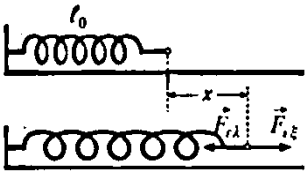
Έργο δύναμης μεταβλητού μέτρου.

Όταν όμως η δύναμη δεν έχει σταθερό μέτρο, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον παραπάνω τύπο-ορισμό του έργου. Τότε για να βρούμε το έργο της δύναμης καταφεύγουμε στην γραφική παράσταση της δύναμης συναρτήσει της μετατόπισης. Από το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης και του άξονα της μετατόπισης, μεταξύ δύο συγκεκριμένων τιμών της μετατόπισης x_1 και x_2, βρίσκουμε το έργο που συνοδεύει την δύναμη για την μετακίνηση του σώματος κατά την διαδρομή από το x_1 στο x_2. Αν το εμβαδόν μας βγει θετικό σημαίνει ότι το έργο είναι ωφέλιμο, σε αντίθετη περίπτωση καταναλισκόμενο. Άρα :

Εμβαδόν = Έργο δύναμης μεταβλητού μέτρου.

Έργο δύναμης ελατηρίου.

Το έργο δύναμης ελατηρίου, είναι το πιο χαρακτηριστικό έργο δύναμης που δεν έχει σταθερό μέτρο.



Όταν ασκήσουμε δύναμη $\vec{F}$ σ' ένα ελατήριο με αποτέλεσμα να το παραμορφώσουμε (επιμήκυνση ή συσπείρωση), το ελατήριο, βάσει του τρίτου νόμου του Newton ασκεί σε εμάς μια ίση και αντίθετη δύναμη με την δική μας, η οποία εξαρτάται από την παραμόρφωση, δηλαδή την απομάκρυνση του ελατηρίου από το φυσικό του μήκος (ℓ_o). Η δύναμη αυτή που αναπτύσσει το ελατήριο, ονομάζεται δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου, και δίνεται από τον νόμο του Hooke, που εκφράζεται από την σχέση :

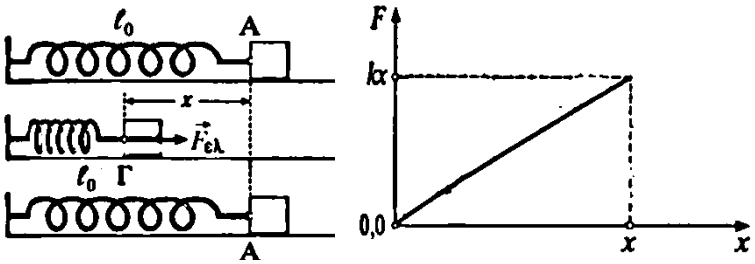
$$\vec{F}_{\varepsilon\lambda.} = -k \cdot \vec{x},$$

όπου k (N/m) ονομάζεται σταθερά επαναφοράς του ελατηρίου και είναι χαρακτηριστική για το ελατήριο. Όσο μεγαλύτερη είναι αυτή η σταθερά, τόσο δυσκολότερο είναι να παραμορφώσουμε το ελατήριο. Τότε το ελατήριο ονομάζεται σκληρό. Αντίθετα όταν η σταθερά επαναφοράς k είναι μικρή, το ελατήριο παραμορφώνεται εύκολα και ονομάζεται μαλακό. x (m) είναι η συμπίεση ή η επιμήκυνση του ελατηρίου. Να σημειωθεί ότι το μέτρο της δύναμης επαναφοράς του ελατηρίου είναι : $F_{\varepsilon\lambda.} = k \cdot x$.

Από τον νόμο του Hooke, συμπεραίνουμε ότι η δύναμη που αναπτύσσει το ελατήριο εξαρτάται από την παραμόρφωση x και είναι **ΠΑΝΤΑ** αντίθετη αυτής. Δηλαδή το ελατήριο «θέλει» να επιστρέψει στην θέση όπου έχει το φυσικό του μήκος.

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε την ενέργεια που μεταφέρουμε στο ελατήριο, όταν το συμπιέζουμε ή όταν το επιμηκύνουμε, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο-ορισμό του έργου, μιας και η δύναμη που ασκούμε στο ελατήριο (άρα και η δύναμη επαναφοράς αυτού) εξαρτάται από την παραμόρφωση. Άρα θα πρέπει να κάνουμε την γραφική παράσταση. Επειδή όμως είναι πάντα $\vec{F} = -\vec{F}_{\varepsilon\lambda.}$, μπορούμε να βρούμε την ενέργεια που δίνουμε στο ελατήριο, αν βρούμε το έργο που συνοδεύει την $\vec{F}_{\varepsilon\lambda.}$.

Έτσι για να βρούμε το έργο της δύναμης $\vec{F}_{\varepsilon\lambda.}$, κάνουμε την γραφική παράσταση της σχέσης $F_{\varepsilon\lambda.} = k \cdot x$. Το εμβαδόν κάτω από την γραφική παράσταση θα μας δώσει <u>αριθμητικά</u> το έργο, ενώ το πρόσημο θα το βρίσκουμε από την φορά της δύναμης $\vec{F}_{\varepsilon\lambda.}$ σε σχέση με την μετατόπιση. Γενικά η γραφική παράσταση θα είναι της μορφής :



Το έργο της δύναμης επαναφοράς του ελατηρίου θα είναι ίσο με το εμβαδόν του παραπάνω τριγώνου, θα είναι δηλαδή ίσο με :

$$\left| W_{F_{\varepsilon\lambda.}} \right| = \frac{1}{2} kx \cdot x \Leftrightarrow \left| W_{F_{\varepsilon\lambda.}} \right| = \frac{1}{2} kx^2 .$$

Όσο για το πρόσημο του έργου, διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

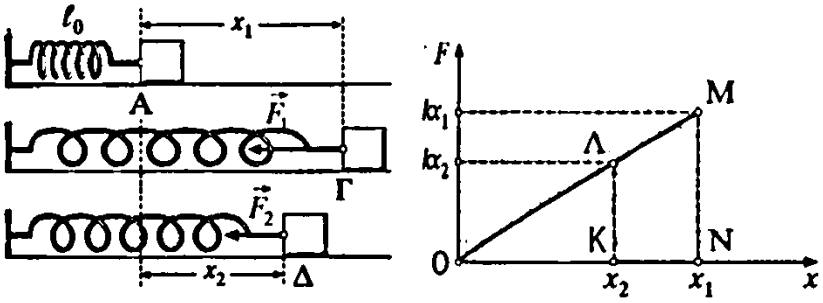
- Αν το ελατήριο το συμπιέζουμε προς τα αριστερά, από την θέση Α στην θέση Γ, τότε η δύναμη επαναφοράς θα είναι προς τα δεξιά, άρα αντίθετη της συμπίεσης, οπότε το έργο της δύναμης του ελατηρίου θα είναι αρνητικό.

$$W_{F_{ελ.}} = -\frac{1}{2}kx^2 .$$

- Αν το ελατήριο είναι ήδη συσπειρωμένο στην θέση Γ, και το αφήνουμε ελεύθερο να εκτονωθεί προς την θέση Α, η δύναμη επαναφοράς είναι προς τα δεξιά, ομόρροπη δηλαδή της μετατόπισης, οπότε το έργο της δύναμης επαναφοράς του ελατηρίου θα είναι θετικό.

$$W_{F_{ελ.}} = \frac{1}{2}kx^2 .$$

- Ένα σώμα είναι δεμένο στην ελεύθερη άκρη ελατηρίου σταθεράς k. Αφήνουμε το σώμα από την θέση Γ, όπου το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά x_1. Το έργο της δύναμης του ελατηρίου για την μετατόπιση από την θέση Γ στην θέση Δ, θα είναι θετικό, γιατί η δύναμη επαναφοράς είναι ομόρροπη της μετατόπισης. Η αριθμητική τιμή του έργου βρίσκεται από το εμβαδόν του σχήματος, και είναι ίσο με :



$$W_{F_{ελ.}}^{Γ\to Δ} = E_{ΚΛΜΝ} = E_{ΟΝΜ} - E_{ΟΚΛ} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 > 0 \text{ ή}$$

$$W_{F_{ελ.}}^{Γ\to Δ} = E_{ΚΛΜΝ} = \frac{(kx_2 + kx_1)}{2}(x_1 - x_2) = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 > 0$$

Δηλαδή **ΓΕΝΙΚΑ** το έργο της δύναμης του ελατηρίου δίνεται από την σχέση :

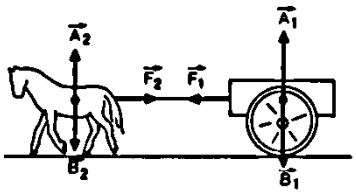
$$W_{F_{ελ.}} = U_{αρχ.} - U_{τελ.} \Leftrightarrow W_{F_{ελ.}} = \frac{1}{2}k \cdot x_{αρχ.}^2 - \frac{1}{2}k \cdot x_{τελ.}^2 ,$$

όπου $x_{αρχ.}$ και $x_{τελ.}$ είναι αντίστοιχα η αρχική και η τελική παραμόρφωση του ελατηρίου από την θέση φυσικού του μήκους.

Τι είναι σύστημα σωμάτων ;

Σύστημα σωμάτων λέμε ένα σύνολο σωμάτων τα οποία απομονώνουμε νοερά από τα υπόλοιπα σώματα που αποτελούν το περιβάλλον του συστήματος. Βασικό γνώρισμα για να αποτελούν κάποια σώματα σύστημα, είναι να αλληλεπιδρούν.

Ποιες δυνάμεις ονομάζονται εσωτερικές και εξωτερικές σ' ένα σύστημα σωμάτων ;



Ως εσωτερικές δυνάμεις ενός συστήματος σωμάτων, ονομάζουμε τις δυνάμεις που ανταλλάσσουν μεταξύ τους τα σώματα που ανήκουν στο ίδιο σύστημα.

Ως εξωτερικές δυνάμεις ονομάζουμε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα του συστήματος από τα σώματα του περιβάλλοντος.

Έτσι για παράδειγμα, στο παράδειγμά μας, ορίζουμε ως σύστημα σωμάτων το άλογο και την άμαξα. Εσωτερικές δυνάμεις για αυτό το σύστημα είναι οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, ενώ εξωτερικές δυνάμεις είναι τα βάρη $\vec{B}_1$ και $\vec{B}_2$ (ασκούνται από την Γη), καθώς και οι κάθετες αντιδράσεις από το δάπεδο $\vec{A}_1$ και $\vec{A}_2$ (ασκούνται από το δάπεδο).

Ποιο σύστημα ονομάζεται απομονωμένο ή μονωμένο ;

Ένα σύστημα σωμάτων στο οποίο δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις ή αν ασκούνται έχουν συνισταμένη ίση με μηδέν ονομάζεται απομονωμένο ή μονωμένο. Τα απομονωμένα συστήματα σωμάτων παίζουν βασικότατο ρόλο στην Φυσική, γιατί σ' αυτά διατηρείται ένα αρκετά χρήσιμο μέγεθος για την μελέτη της κινητικής συμπεριφοράς των σωμάτων, που λέγεται ορμή.

Τι ονομάζεται ορμή ενός σώματος ;

Ορμή ενός σώματος μάζας m το οποίο κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{cm}$, ονομάζουμε το διανυσματικό μέγεθος το οποίο έχει την κατεύθυνση της ταχύτητας του σώματος, σημείο εφαρμογής πάνω στο σώμα και μέτρο που δίνεται από την σχέση :

$$p = m \cdot \upsilon_{cm} .$$

Μονάδα της ορμής είναι το $kgr\frac{m}{s}$, ή ισοδύναμα Ns.

Την ορμή, όπως και όλα τα υπόλοιπα διανυσματικά μεγέθη, μπορούμε να την αναλύσουμε σε κάθετους μεταξύ τους άξονες xx΄ και yy΄. Άρα αν αναλύσουμε την ορμή στις δύο συνιστώσες της $\vec{p}_x$ και $\vec{p}_y$, η συνισταμένη ορμή που θα ασκείται στο σώμα θα δίνεται από την σχέση :

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} ,$$

και θα έχει διεύθυνση τέτοια που θα δημιουργεί γωνία θ με τον άξονα x΄x :

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{p_y}{p_x} .$$

Άρα καταλαβαίνουμε ότι τα συμπεράσματα που ισχύουν για την συνισταμένη δυνάμεων, ισχύουν και για την συνισταμένη ορμή, άρα ισχύουν οι σχέσεις : $p = p_1 + p_2$ αν οι συνιστώσες ορμές είναι ομόρροπες, $p = |p_1 - p_2|$ αν οι συνιστώσες ορμές είναι αντίρροπες, και $p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 \cdot p_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi}$ με διεύθυνση $\varepsilon\varphi\theta = \frac{p_2 \cdot \eta\mu\varphi}{p_1 + p_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi}$, όταν οι συνιστώσες ορμές σχηματίζουν τυχαία γωνία φ.

Σχέση κινητικής ενέργειας και ορμής ενός σώματος.

Η μεταφορική κινητική ενέργεια, δηλαδή η ενέργεια που έχει ένα σώμα μάζας m και ταχύτητας $\vec{\upsilon}_{cm}$, λόγω της ταχύτητάς του, δίνεται από την σχέση :

$$K = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon_{cm}^2 .$$

Επειδή όμως $p = m \cdot \upsilon_{cm}$, προκύπτει :

$$\left.\begin{array}{l} K = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon_{cm}^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2 \upsilon_{cm}^2}{m} \\ p = m \cdot \upsilon_{cm} \end{array}\right\} \Leftrightarrow K = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m} .$$

Γενικευμένη μορφή του θεμελιώδη νόμο της κίνησης.

Όπως γνωρίζουμε ο βασικότερος νόμος της κινητικής, είναι ο 2ος νόμος του Newton, ο οποίος εκφράζεται ως εξής : Όταν σ' ένα σώμα ασκούνται δυνάμεις με συνισταμένη $\Sigma\vec{F}$, τότε στο σώμα αναπτύσσεται μια επιτάχυνση $\vec{\alpha}_{cm}$, η οποία δίνεται από την σχέση :

$$\Sigma\vec{F} = m\cdot\vec{\alpha}_{cm},$$

όπου m είναι η μάζα του σώματος.

Πλέον μπορούμε να εισάγουμε την ορμή και να πάρουμε την γενικευμένη μορφή του θεμελιώδη νόμου της κινητικής. Συγκεκριμένα :

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma\vec{F} = m\cdot\vec{\alpha}_{cm}\\ \vec{\alpha}_{cm} = \dfrac{\Delta\vec{u}_{cm}}{\Delta t}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \Sigma\vec{F} = m\cdot\frac{\Delta\vec{u}_{cm}}{\Delta t} = m\cdot\frac{\vec{u}_{cm_{\tau\varepsilon\lambda.}} - \vec{u}_{cm_{\alpha\rho\chi.}}}{\Delta t} = \frac{m\cdot\vec{u}_{cm_{\tau\varepsilon\lambda.}} - m\cdot\vec{u}_{cm_{\alpha\rho\chi.}}}{\Delta t} = \frac{\vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda.} - \vec{p}_{\alpha\rho\chi.}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} \Leftrightarrow$$

$$\Sigma\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}.$$

Άρα η συνισταμένη των δυνάμεων $\Sigma\vec{F}$, που ασκούνται σ' ένα κινούμενο σώμα μάζας m, είναι ίση με την μεταβολή της ορμής του σώματος $\Delta\vec{p}$ που συμβαίνει σε χρόνο Δt, προς τον χρόνο αυτό, ή η συνιστάμενη των δυνάμεων που ασκείται σ' ένα κινούμενο σώμα μάζας m είναι ίση με τον ρυθμό μεταβολής της ορμής του.

Από την γενικευμένη μορφή του θεμελιώδη νόμου της κινητικής, καταλαβαίνουμε ότι για να μεταβληθεί η ορμή ενός σώματος, απαιτείται η εξάσκηση μιας συνισταμένης δύναμης πάνω στο σώμα.

Καταλαβαίνουμε ότι όταν λέμε για συνισταμένη δυνάμεων, εννοούμε μόνο τις εξωτερικές δυνάμεις. Οι εσωτερικές δυνάμεις ενός συστήματος σωμάτων ΔΕΝ μεταβάλλουν την ορμή του συστήματος.

Αρχή διατήρησης της ορμής συστήματος σωμάτων.

Αν σ' ένα σώμα δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις ή αν ασκούνται έχουν συνισταμένη ίση με μηδέν, προκύπτει από τον γενικευμένο 2ο νόμο του Newton, ότι :

$$\Sigma\vec{F}_{\varepsilon\xi.} = 0 \Leftrightarrow \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = 0 \Leftrightarrow \Delta\vec{p} = 0 \Leftrightarrow \vec{p} = \text{σταθερή} \Leftrightarrow \vec{p}_{ολ.\text{πριν}} = \vec{p}_{ολ.\text{μετα}},$$

όπου ως «πριν» και «μετά» ορίζουμε τις καταστάσεις πριν και μετά από το γεγονός στο οποίο αλλάζει η ορμή του συστήματος, π.χ. μια σύγκρουση.

Η παραπάνω πρόταση αποτελεί την χρησιμότατη **Αρχή Διατήρησης της Ορμής**, η οποία αναφέρει ότι : όταν σ' ένα σύστημα σωμάτων δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις ή όταν ασκούνται έχουν συνισταμένη ίση με μηδέν (δηλαδή όταν το σύστημα των σωμάτων είναι απομονωμένο), η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Παρατηρήσεις για την εφαρμογή της Αρχής Διατήρησης της Ορμής (Α.Δ.Ο.).

Στα προβλήματα εφαρμογής της Α.Δ.Ο. σ' ένα σύστημα σωμάτων :

a. Οι ταχύτητες όλων των σωμάτων πρέπει να αναφέρονται στους ίδιους άξονες.

b. Όταν όλα τα σώματα του συστήματος κινούνται στην ίδια πάντοτε διεύθυνση, τότε η διανυσματική σχέση της Α.Δ.Ο., μετατρέπεται σε αλγεβρική, δηλαδή :

$$\vec{p}_{ολ.\text{πριν}} = \vec{p}_{ολ.\text{μετα}} \Leftrightarrow p_{ολ.\text{πριν}} = p_{ολ.\text{μετα}}.$$

c. Όταν ένα τουλάχιστον από τα σώματα του συστήματος αλλάζει διεύθυνση κίνησης, τότε η διανυσματική σχέση της Α.Δ.Ο. ισοδυναμεί με δύο αλγεβρικές σχέσεις που αντιστοιχούν στους δύο κάθετους άξονες x΄x και y΄y, όπως ισχύει και στις δυνάμεις. Δηλαδή :

$$\vec{p}_{\text{ολ.πριν}} = \vec{p}_{\text{ολ.μετά}} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{p}_{x_{\text{ολ.πριν}}} = \vec{p}_{x_{\text{ολ.μετά}}} \\ \vec{p}_{y_{\text{ολ.πριν}}} = \vec{p}_{y_{\text{ολ.μετά}}} \end{cases}.$$